基礎数理 AI 第 4 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

6 月 26 日

逆関数

関数 $f(x)$ に対して $g \circ f(x) = x$ となる関数 $g(x)$ は存在するか？
もしくはちゃんと定義できるか？

定義（仮）

関数 $f(x)$ に対して $g \circ f(x) = x$ となる関数 $g(x)$ が存在すれば $g = f^{-1}$ と書き f の逆関数と呼ぶ。

この定義は（仮）と書いてあるように、直感的には十分だが、次のような例に対して上手くいったり、上手くいかなかったりするため定義としては不十分で、後述するように定義域、値域を指定する必要がある。

逆関数

$\circ$ $f(x) = x$ の場合
この場合直感的にも分かるように $f^{-1}(x) = x$ とすればよい。
$\circ$ $f(x) = x^2$ の場合
この場合直感的には $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ととればよいように思えるが、$f^{-1} \circ f(-1) = \sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1$ でありうまくいっていない。
うまくいくようにするためには関数 $f(x)$ の定義域をうまく制限する必要がある。

逆関数

○ 復習：関数 $f(x)$ の定義域と値域
定義域：関数 $f(x)$ が定義されている x 全体
値域：関数 $f(x)$ が取りうる値全体
$f(X)$ ：定義域内のすべての x を考えて $f(x)$ として取る全ての値（$f(X) \subset Y$ であり、こちらを値域と呼ぶこともある。）

定義

定義域が X 値域が Y の関数 $f(x)$ を省略して
$f : X \to Y$ と書く

定義

$f : X \to Y$ に対して $g \circ f(x) = x$ となる $g : f(X) \to X$ が存在すれば $g = f^{-1}$ と書き f の逆関数と呼ぶ。

逆関数

$\circ$ $f(x) = x$ の場合は $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で逆関数 $f^{-1}(x) = x$ があったが
$\circ$ $f(x) = x^2$ の場合は $f : \{x; x \geq 0\} \to \{x; x \geq 0\}$ で逆関数 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ が存在している。

逆関数

命題

$f: X \to Y$ が単射（$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$） ならば逆関数 $f^{-1}: f(X) \to X$ が存在する。

この命題を通常の関数で使えるような自然な十分条件として次の定理が挙げられる。

定理 8

$f: X \to Y$ が連続で、狭義単調（$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ もしくは $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$）ならば逆関数 $f^{-1}: f(X) \to X$ が存在する。
さらに $f^{-1}: f(X) \to X$ も連続で、狭義単調。

注意

$Y = f(X)$ とする。$f: X \to Y$ の逆関数 $f^{-1}: Y \to X$ が存在すれば $(f^{-1})^{-1} = f$

逆関数

∘$2^{\sqrt{2}}$ はどのように決めるか？
高校まででは、あまり気にせず、a^x $(a>0)$ は連続関数であり、その逆関数 $\log_a x$ も気にせず、連続関数としてあるものだとしていた。
実際は $2^{\sqrt{2}}$ や log を決めるのは次のように行う。
$f(x)=x^n$ は $x\geq 0$ で連続、狭義単調増大なので、逆関数 $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$ が $n\in\mathbb{N}$ で存在する。従って $2^{1/n}$ はすべて定義できるが、さらにこれを m 乗することで $2^{m/n}$ が定義できる。つまり 2^x は $x\in\mathbb{Q}$ であれば定義できる。
この関数は $x\in\mathbb{Q}$ 上で連続、狭義単調増大であることが分かるため、$x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ に対しては $x_n\to x$ $(n\to\infty)$ かつ単調増大となる数列 $\{x_n\}$ を使って 2^{x_n} の極限として定義する。
これを含めて $x\in\mathbb{R}$ 上で定義できたが、やはり連続、狭義単調増大になるので、逆関数が存在するので、それを $\log_2 x$ とする。

逆関数

○ 逆三角関数

$f(x) = \sin x$ は周期関数であるので、定義域を考慮する必要があるが、（一番分かりやすいところを考えて）$X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ととれば、$f(X) = [-1, 1]$ であり、連続、狭義単調増大になり、逆関数 $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ が存在する。

この逆関数を以下のように書く

$\sin^{-1} x, \quad \arcsin x, \quad \mathrm{Arcsin}\ x$

同様に $g(x) = \cos x$ に対して $Y = [0, \pi]$ ととることで

逆関数 $g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ が存在し、以下のように書く

$\cos^{-1} x, \quad \arccos x, \quad \mathrm{Arccos}\ x$

同様に $h(x) = \tan x$ に対して $Z = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ととることで

逆関数 $h^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ が存在し、以下のように書く

$\tan^{-1} x, \quad \arctan x, \quad \mathrm{Arctan}\ x$

逆関数

例

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$
を示せ。

解答例

tan に関する和の公式　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ と、
$f \circ f^{-1}(x) = x$、つまり $\tan\circ\arctan(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$、$\tan\circ\arctan(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$
を使う。
両辺 tan をとり等しければよい。
左辺 $= \tan\frac{1}{4} = 1.$
右辺 $= \tan\left(\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}\right)$

$$= \frac{\tan\circ\arctan(\frac{1}{2}) + \tan\circ\arctan(\frac{1}{3})}{1 - \tan\circ\arctan(\frac{1}{2})\tan\circ\arctan(\frac{1}{3})} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1 \qquad \square$$

逆関数

問題　（マチンの公式）

$$\frac{\pi}{4} - 4\arctan\frac{1}{5} = \arctan\frac{1}{239}$$

は微妙に間違っているので、正しく直せ。