

基礎数理 AI 第 3 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

6 月 23 日

関数の極限と連続性

関数の連続性は関数の極限を通して定義される。
関数の極限は数列と同じように考える。

関数の極限と連続性

関数の極限は数列と同じように x が a に近づくときの関数の値であるが、多くの場合（順序が逆になるが）連続関数なのでその値になる。一方で変なことが起こることもあるので気を付ける必要がある。

定義

$y = f(x)$ は $x = a$ の近くで定義されているが、 $f(a)$ は定義されていなくても構わない。

関数 $f(x)$ が $x \rightarrow a$ で l に収束する

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l,$$

$$\Leftrightarrow f(x) \rightarrow l, (x \rightarrow a)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ s.t. } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

関数の極限と連続性

関数が a より大きいところでしか定義されていない場合などもあるので、次のような定義は便利である。

定義

$y = f(x)$ は $x = a$ の近くで定義されているが、 $f(x)$ は $x \leq a$ で定義されていなくても構わない。

関数 $f(x)$ の $x \rightarrow a$ での右極限が l である

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = l,$$

$$\Leftrightarrow f(x) \rightarrow l, (x \rightarrow a+0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ s.t. } a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

同様に左極限も定義できる。(教科書参照)

関数の極限と連続性

次の定理は教科書にはないが、この定理から、数列の極限で示した性質はすべて関数の極限でも満たされることが分かるだけでなく、基礎数理 AII で行う多変数関数の極限に関しても全く同じことが適用できる。

定理

関数 $f(x)$ が $x \rightarrow a$ で収束する

$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}, x_n \neq a, x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ に対して $\{f(x_n)\}$ が収束する。

同様に右極限、左極限も同じことがいえる。

関数の極限と連続性

補題（問 4）

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = l$$

関数の極限と連続性

先の定理のところでも述べたが、数列の極限で成り立つような性質は関数の極限でも成り立つ。

定理 4 基本性質

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ として

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = lm$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

$$(4) f(x) \leq g(x) \Rightarrow l \leq m$$

定理 5 はさみうちの定理

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$$

関数の極限と連続性

定義

関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

注意

右極限、左極限を使うことで、右連続、左連続も定義する。

定義

関数 $f(x)$ が 区間 I 上で連続

$\Leftrightarrow$ 関数 $f(x)$ が $\forall x \in I$ で連続

先にも述べたが、連続はあくまで、極限を通して定義するものであり、極限と関数の値が多くの場合で一致しているのは、我々がよく使う関数が連続関数だからである。

関数の極限と連続性

直感的にグラフが途切れていなければ連続関数だが、

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

を考えると、 $x = 0$ で定義されていないが、それ以外では連続関数である。

一方で $x = 0$ でどのような値を定義しても連続にはならない。

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ が無理数} \\ 1 & x \text{ が有理数} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ が無理数} \\ \frac{1}{p} & x = \frac{q}{p} \text{ (既約分数)} \end{cases}$$

は（特に $g(x)$ は）グラフを書くと途切れているようには見えない。しかし $g(x)$ は全ての点で不連続であり、 $h(x)$ は x が有理数の場合不連続、無理数の場合は連続になる。

関数の極限と連続性

連続の定義が極限を通して行われるので、関数の極限で表れた性質（これ自体が数列の極限で表れた性質）を受け継ぐ。

定理

(1) 関数 $f(x), g(x)$ が $x = a$ で連続

$\Leftrightarrow f(x) \pm g(x), f(x)g(x), kf(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ も $x = a$ で連続

(2) $y = f(x)$ が $x = a$ で連続、 $z = g(y)$ が $y = f(a)$ で連続

$\Leftrightarrow z = g \circ f(x) = g(f(x))$ も $x = a$ で連続

関数の極限と連続性

定理 7 中間値の定理

関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続で $f(a) \neq f(b)$ とする。このとき $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数 k に対して $f(c) = k$ となる $c \in [a, b]$ が存在する。

定理 最大値、最小値

閉区間 I で連続な関数 $f(x)$ は I 上で最大値、最小値をとる。

関数の極限と連続性

問題

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ は認める}$$

次は存在するか？存在すればその極限値を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

特にどのような性質を使ったのかを書くように