2026/04/07.

応用数理 E 期末レポート

このレポートを作成するにあたり、以下の項目に関して正確に答えよ。
なお**１つの項目でも回答しない場合および虚偽記載があった場合は０点**になる。
また虚偽記載が疑われる場合も０点として成績を出すが、面談により適正な点数に訂正する。

項目１

このレポートを作成するにあたり参照した教科書、ノート、参考書等を全て記載せよ。
教科書、自身のノートに関しては詳細を省略してかまわないが、他の教科書などは、詳細な情報を、他の人のノートを見せてもらった場合は、その氏名、学籍番号も記載するように

項目２

（項目１と区別せずに書いても構わないが）このレポートを作成するにあたり参照したコンピュータ、インターネットに関して全て記載せよ。
ソフトウェア名や、URL など詳細な情報を入れるように。
また生成系 AI を使用した場合は、どのように使用したかを記載するように。(問題ごとに記述することを推奨する。)

項目３

このレポートを作成するにあたり（一部でも）レポートを見せてもらった人がいる場合はその全ての人の氏名、学籍番号を記載せよ。先輩などでも同様に記載するように。(問題ごとに記述することを推奨する。)

項目４

このレポートを作成するにあたり相談するなど協力して解答した問題がある場合はその問題と相談した人すべての氏名、学籍番号を記載せよ。またどのような相談をしたのか（例えば、＊＊に関して教えてもらった、＊＊の書かれている教科書のページを教えてもらった、＊＊の計算に関して＊＊したなど）具体的に記載せよ。
先輩などでも同様に記載するように。(問題ごとに記述することを推奨する。)

項目５

このレポートを他の人に見せた場合それらの人すべての氏名、学籍番号を記載せよ。

問１ X, Y は 1 から 5 をとる確率変数とするが，独立ではなく、次を満たしている。
Z を標準正規分布として

$$P(X=1)=P(Z<-0.36),\quad P(X=2)=P(-0.36<Z\leq-0.07),\quad P(X=3)=P(-0.07<Z\leq 0.24),$$
$$P(X=4)=P(0.24<Z\leq 0.86),\quad P(X=5)=P(Z>0.86)$$

その同時確率分布の一部は以下のように与えられるものとする。

		Y					
		1	2	3	4	5	計
X	1	0.01	0.01	0.02	0.02		
	2	0.01	0.02	0.03	0.04		
	3	0.01	0.02	0.04	0.05		
	4	0.01	0.03	0.04	0.08		
	5	0.02	0.03	0.05	0.09		
	計	0.06	0.11	0.19	0.28		

この時以下の問いに答えよ.
(1) 条件を満たすように同時確率分布（表）を完成させよ。
(2) このとき期待値，分散，共分散，すなわち $E[X], E[Y], V[X], V[Y], \mathrm{Cov}(X,Y)$ を求めよ.

問２ 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{Z}\sin x & 0\leq x\leq a \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

但し Z, a は定数とする.
(1) $f(x)$ が連続型確率変数の確率密度関数になる $a>0$ の範囲を求めよ.
(2) (1) で求めた a の最大値の時の Z の値を求めよ。
(3) (2) で求めた a, Z を使って、X の確率密度関数を $f(x)$ とするとき、X の期待値と分散 $E[X], V[X]$ を求めよ.

問３
母集団分布 $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ に対して、それぞれの分布は分からないが、

$$\bar{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i$$

の分布関数は a をパラメータとして、

$$f(x)=\begin{cases}x-a+1 & a-1\leq x\leq a \text{ のとき}\\ -x+a+1 & a\leq x\leq a+1 \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

と分かっているものとする。この設定の下で、母平均の実現値が

$$\bar{x}=0.2$$

のときパラメータ a の、信頼係数 95% の信頼区間を与えよ。
(ヒント この設定の下での上側 $\alpha/2$ 点は 2 次方程式の解として与えられる。)

問４ 中の見えない大きな箱と赤色の玉３個，黄色の玉３個がある．（箱の中に入れればどの玉が赤色か，黄色かは分からないものとする．）N 先生がこの６個の玉のうち５個を箱の中へ入れた．ただし N 先生は無作為に玉を選んだ．

A さん，B さんがこの箱の中から１つ玉を取り出し，色を確認して箱の中に戻すという操作を行ったところ以下のようであった．

A さんは６回玉を取り出し，６回とも赤色の玉だった．

B さんは６００回玉を取り出し，３０３回が赤色の玉で残りの２９７回が黄色の玉だった．

このとき事象を以下のように定める．

A : ６回玉を取り出し，６回とも赤色の玉だった

B : ６００回玉を取り出し，３０３回が赤色の玉で残りの２９７回が黄色の玉だった

R : N 先生が箱の中に３個の赤色の玉と２個の黄色の玉を入れた

Y : N 先生が箱の中に２個の赤色の玉と３個の黄色の玉を入れた

以下の問に答えよ．

(1). N 先生が箱の中に３個の赤色の玉と２個の黄色の玉を入れたという条件の下で６回玉を取り出し，６回とも赤色の玉がでる条件付き確率 $P(A|R)$ を求めよ．

同様に N 先生が箱の中に２個の赤色の玉と３個の黄色の玉を入れたという条件の下で６回玉を取り出し，６回とも赤色の玉がでる条件付き確率 $P(A|Y)$ を求めよ．

(2). N 先生が箱の中に３個の赤色の玉と２個の黄色の玉を入れたという条件の下で６００回玉を取り出し，３０３回が赤色の玉で残りの２９７回が黄色の玉がでる条件付き確率 $P(B|R)$ を求めよ．

同様に N 先生が箱の中に２個の赤色の玉と３個の黄色の玉を入れたという条件の下で６００回玉を取り出し，３０３回が赤色の玉で残りの２９７回が黄色の玉がでる条件付き確率 $P(B|Y)$ を求めよ．

(3). ベイズの定理を用いることで６回玉を取り出し，６回とも赤色の玉がでたという条件の下で N 先生が３個の赤色の玉と２個の黄色の玉を入れた条件付き確率 $P(R|A)$ と６００回玉を取り出し，３０３回が赤色の玉で残りの２９７回が黄色の玉がでたという条件の下で N 先生が３個の赤色の玉と２個の黄色の玉を入れた条件付き確率 $P(R|B)$ とを求めこの２つを比較することで A さん B さんどちらがより強く「N 先生が３個の赤色の玉と２個の黄色の玉を入れた」と信じられるか述べよ．

(4). (3) の結果は通常では考えにくい結果であるが、これはどこから（何が原因で）起こったと思われるかあなた自身の見解を述べよ。

(ヒント：(1),(2) は数学の問題として $\left(\frac{a}{b}\right)^c$ のような形で答えることを想定している。)

問５ N 先生は実験のため正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う乱数を発生させデータを取ったが、μ, σ^2 を書いておいたメモをなくしてしまった。この μ, σ^2 をデータから再現したいがどのような考え方で再現すればよいかを与え、実際に再現せよ。

なおデータに関しては 2026-0.csv から 2026-9.csv が準備されているが、学籍番号の最後の数字にあわせて使用するように。