2024/04/09.

応用数理 E 期末レポート

問１ A B がランダムに 1 から 5 の数を与えるが，その同時分布が以下のように与えられるものとする。

		B					
		1	2	3	4	5	計
A	1	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.09
	2	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.15
	3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.07	0.20
	4	0.01	0.03	0.04	0.08	0.09	0.25
	5	0.02	0.03	0.05	0.09	0.12	0.31
	計	0.06	0.11	0.18	0.29	0.36	1

この時以下の問いに答えよ．

(1) A_3 を A が 3 である事象，$B_{4,5}$ を B が 4 または 5 である事象とする．
この時 A_3 と $B_{4,5}$ が独立であるか判定せよ．

(2) 離散型確率変数 X, Y をそれぞれ A,B が与えた数字とする．このとき期待値，分散，共分散，すなわち $E[X], E[Y], V[X], V[Y], \mathrm{Cov}(X, Y)$ を求めよ．

問２ 2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{Z}\{\sin(x-y)+1\}(x+y) & 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi \text{のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする．

(1) $f(x, y)$ が確率変数 X, Y の同時確率密度関数になる Z を求めよ．

(2) (1) で与えた Z を用いて X, Y の期待値，分散，共分散，すなわち $E[X], E[Y], V[X], V[Y], \mathrm{Cov}(X, Y)$ を求めよ．

問３

(1) ある事象 A, B に対して $P(A) = 0.61, P(B) = 0.63$ とする．$P(A, B)$ の最大値，　最小値を求めよ．

(2) $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, 1)$ とする．すなわち X, Y 共に標準正規分布に従う．
X, Y が独立のとき

$$P(-1.18 \leq X \leq 1.35,\quad 0.17 \leq Y \leq 1.43)$$

を求めよ．

(3) $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, 1)$ とする．すなわち X, Y 共に標準正規分布に従う．
次の確率の最大値、最小値を求めよ．

$$P(-1.18 \leq X \leq 1.35,\quad 0.17 \leq Y \leq 1.43)$$

問 4 あるネットワークゲームは A,B,C の３つのサーバーがあり、ゲームに参加するときにランダムに A 20 %，B 35 %，C 45 % に割り振られる．ゲームに参加した報酬としてアイテムを１つもらうが，良いアイテムと普通のアイテムがあり，それぞれのサーバーごとに A 5 %，B 3 %，C 1 % で良いアイテムをもらえる．

(1) N 君がこのゲームに参加した時良いアイテムをもらった．この時の N 君が A のサーバーに割り振られた確率を求めよ．

(2) サーバー毎にゲームの運営者がいるが，C のサーバーの運営者が間違って良いアイテムをもらえる確率を C 0.02 % としてしまった．

このとき N 君がこのゲームに参加した時良いアイテムをもらった時に N 君が A のサーバーに割り振られた確率を (1) で与えた確率と同じにするためには A のサーバーの運営者は良いアイテムが出る確率を何 % にする必要があるか与えよ．ただし B のサーバーの運営者は良いアイテムをもらえる確率を変えないものとする．

問 5 次のようなパズルのような問題がある．

問題を簡単にするために 1 年は 365 日とする（閏年は考えない）．ある工場では n 人の工員を雇うことにするが，このうちの 1 人でも誕生日の人がいればその日は休みに，1 人も誕生日の人がいなければ働き、その日は人数と同じ n （単位）の利益を得るものとする．このとき，この工場の 1 年間の利益は働いた日数 $\times n$ になる．例えばたまたま全員が同じ誕生日の場合は働いた日数 $= 364$ なので $364n$ の年間利益を得る．

n 人の工員をランダムに雇うとき，すなわち n 人それぞれの工員の誕生日は独立で一様分布に従うときこの年間利益は確率変数になるが，その期待値を $f(n)$ とする．この $f(n)$ を最大にする n を求めよ．

この問題は一見かなり難しいが以下の設問に沿って解答することにより $f(n)$ を最大にする n とその時の $f(n)$ の値を求めよ．

(1) n 人の工員を雇うとき，確率変数 S を 1 人も誕生日の人がいない日数とするとき $f(n)$ を S （やその期待値，分散など）を用いて表せ．

(2) $i = 1, 2, \ldots, 365$ を日にちを表すパラメータとする．確率変数 X_i を次のように定める

$$X_i = \begin{cases} 1 & i \text{ 日に 1 人も誕生日の人がいなかった場合} \\ 0 & i \text{ 日の誕生日の人がいた場合} \end{cases}$$

このとき $P(X_i = 1)$ を求めよ．

(3) (2) の設定で S を X_i を用いて表せ．また $E[S]$ を求めよ．

(4) 以上を用いて $f(n)$ を具体的に表せ．

(5) (4) で求めた $f(n)$ より $f(n+1) - f(n)$ を考えることで $f(n)$ が最大になる n を求め，$f(n)$ の最大値（の近似値）を与えよ．

問 6 N 先生は実験のため正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う乱数を発生させデータを取ったが、μ, σ^2 を書いておいたメモをなくしてしまった。この μ, σ^2 をデータから再現したいがどのような考え方で再現すればよいかを与え、実際に再現せよ。

なおデータに関しては 2024-0.csv から 2024-9.csv が準備されているが、学籍番号の最後の数字にあわせて使用するように。