応用数理 E 期末レポート

問 1 1 から 5 の数字が書かれた球が 1 つずつ箱の中に入っており、まず A が 1 つ球を取り出し、残った球の中から B が 1 つ球を取り出す。このとき（多少中の球が分かるため）ある同時分布に従って球を取り出すものとする。同時分布が以下のように与えられるものとする。

		B					
		1	2	3	4	5	計
A	1	0	0.02	0.02	0.03	0.04	0.11
	2	0.01	0	0.03	0.04	0.06	0.14
	3	0.01	0.02	0	0.06	0.12	0.21
	4	0.01	0.02	0.08	0	0.15	0.26
	5	0.01	0.02	0.1	0.15	0	0.28
	計	0.04	0.08	0.23	0.28	0.37	1

この時以下の問いに答えよ。

(1) A_2 を A が 2 以下の球を取り出す事象, B_2 を B が 2 以下の球を取り出す事象とする。

この時 A_2 と B_2 が独立であるか判定せよ。

(2) 離散型確率変数 X, Y をそれぞれ A, B が取り出した球に書かれた数字とする。このとき期待値, 分散, 共分散, すなわち $E[X], E[Y], V[X], V[Y], \text{Cov}(X, Y)$ を求めよ。

問 2 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられるとき、それぞれに対して期待値、分散 $E[X], V[X]$, および $E[e^X]$ を求めよ。

問 3

$X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$ とする。すなわち X, Y 共に標準正規分布に従う。

(1) X, Y が独立のとき

$$P(-1.08 \leq X \leq 1.15, 0.37 \leq Y \leq 1.46)$$

を求めよ。

(2) 次の確率の最大値、最小値を求めよ。

$$P(-1.08 \leq X \leq 1.15, 0.37 \leq Y \leq 1.46)$$

問4 中の見えない大きな箱と赤色の玉3個，黄色の玉3個がある。(箱の中に入れればどの玉が赤色か，黄色かは分からないものとする。) N先生がこの6個の玉のうち5個を箱の中へ入れた。ただしN先生は無作為に玉を選んだ。

Aさん，Bさんがこの箱の中から1つ玉を取り出し，色を確認して箱の中に戻すという操作を行ったところ以下のようなであった。

Aさんは6回玉を取り出し，6回とも赤色の玉だった。

Bさんは600回玉を取り出し，303回が赤色の玉で残りの297回が黄色の玉だった。

このとき事象を以下のように定める。

A：6回玉を取り出し，6回とも赤色の玉だった

B：600回玉を取り出し，303回が赤色の玉で残りの297回が黄色の玉だった

R：N先生が箱の中に3個の赤色の玉と2個の黄色の玉を入れた

Y：N先生が箱の中に2個の赤色の玉と3個の黄色の玉を入れた

以下の問に答えよ。

(1). N先生が箱の中に3個の赤色の玉と2個の黄色の玉を入れたという条件の下で6回玉を取り出し，6回とも赤色の玉がでる条件付き確率 $P(A|R)$ を求めよ。

同様にN先生が箱の中に2個の赤色の玉と3個の黄色の玉を入れたという条件の下で6回玉を取り出し，6回とも赤色の玉がでる条件付き確率 $P(A|Y)$ を求めよ。

(2). N先生が箱の中に3個の赤色の玉と2個の黄色の玉を入れたという条件の下で600回玉を取り出し，303回が赤色の玉で残りの297回が黄色の玉がでる条件付き確率 $P(B|R)$ を求めよ。

同様にN先生が箱の中に2個の赤色の玉と3個の黄色の玉を入れたという条件の下で600回玉を取り出し，303回が赤色の玉で残りの297回が黄色の玉がでる条件付き確率 $P(B|Y)$ を求めよ。

(3). ベイズの定理を用いることで6回玉を取り出し，6回とも赤色の玉がでたという条件の下でN先生が3個の赤色の玉と2個の黄色の玉を入れた条件付き確率 $P(R|A)$ と600回玉を取り出し，303回が赤色の玉で残りの297回が黄色の玉がでたという条件の下でN先生が3個の赤色の玉と2個の黄色の玉を入れた条件付き確率 $P(R|B)$ とを求めこの2つを比較することでAさんBさんどちらがより強く「N先生が3個の赤色の玉と2個の黄色の玉を入れた」と信じられるか述べよ。

(4). (3)の結果は通常では考えにくい結果であるが，これはどこから(何が原因で)起こったと思われるかあなた自身の見解を述べよ。

(ヒント：(1),(2)は数学の問題として $\left(\frac{a}{b}\right)^c$ のような形で答えることを想定している。)

問5 N先生はあるテストを毎年行っているが，その結果からその点数の分布に関して次のような予想を得て，確率モデルを作ろうとしている。

○ X をテストの点数に対応する確率変数とする。

○ 点数は0点から100点の整数値である。

○ $k-1$ 点を取る確率と k 点を取る確率の比は次で与えられる。($1 \leq k \leq 100$)

$$\frac{P(X = k - 1)}{P(X = k)} = \frac{(49 + k)(201 - k)}{(50 + k)(200 - k)}, \quad (1 \leq k \leq 100)$$

(1) これらを全て満たす確率モデルに対して $P(X = k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 100$) を与えよ。

(ヒント： k の関数として与えられる。)

(2) このモデルに対して平均 $E[X]$ ，分散 $V[X]$ を求めよ。

問6 N先生は実験のため正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う乱数を発生させデータを取ったが， μ, σ^2 を書いておいたメモをなくしてしまった。この μ, σ^2 をデータから再現したいがどのような考え方で再現すればよいかを与え，実際に再現せよ。

なおデータに関しては data-01.csv から data-10.csv が準備されているが，学籍番号の最後の数字にあわせて使用するように。