応用数理 E 第 14 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

2022 前期

統計的仮説検定

前回、統計的仮説検定の中でも一番分かりいやすい正規分布で分散は既知の場合の母平均の検定を行った。基本的な考え方は区間推定と同じであることに注意する。(最後の式変形が使いやすいように変えてある。)

分散が未知である場合、他の分布に従っている場合を考えられるが、区間推定の時を参考にしながら、対応する検定統計量 T を考えればよい。また正規分布では等式で話が済んだが、他の分布では必要に応じて近似を行う。

統計的仮説検定

○ 正規分布に従い分散は未知の場合の母平均の検定
t-分布で検定する。
同じ設定における母平均の区間推定と、前回の検定の方法を参考にすれば、
帰無仮説　$H_0 : \mu = \mu_0$ に対して
対立仮説　$H_1 : \mu \neq \mu_0$ とする。
標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_k$ と
分散の不偏推定量 $V = \dfrac{1}{n-1} \sum (X_k - \bar{X})^2$ に対して
$T = \dfrac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{V}}$ は自由度 $n-1$ の t-分布に従う。

統計的仮説検定

前回と同様に考えて、検定統計量 $T_0 = \dfrac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{V}}$ の実現値 t_0 と有意水準 α に対して、t-分布の上側 α 点と比較することにより、t_0 が $[-t(n-1;\alpha/2), t(n-1;\alpha/2)]$ の間に入っていれば、帰無仮説 H_0 を疑いきれず、入っていれば帰無仮説 H_0 はおかしいと結論付ける。
前回と同様にこれをまとめると

統計的仮説検定

統計的仮説検定

(1) 両側検定
帰無仮説 H_0 : $\mu = \mu_0$
対立仮説 H_1 : $\mu \neq \mu_0$
の検定は検定統計量 T_0 の実現値 t_0 に対して
$|t_0| \geq t(n-1, \alpha/2)$ のとき有意水準 α で帰無仮説 H_0 を棄却し、
$|t_0| < t(n-1, \alpha/2)$ のとき棄却しない。
(2)(3) 片側検定
帰無仮説 H_0 : $\mu \leq \mu_0 \quad (\mu \geq \mu_0)$
対立仮説 H_1 : $\mu > \mu_0 \quad (\mu < \mu_0)$
の検定は検定統計量 T_0 の実現値 t_0 に対して
$t_0 \geq t(n-1, \alpha/2)$ のとき有意水準 α で帰無仮説 H_0 を棄却し、
$(t_0 \leq -t(n-1, \alpha/2))$
$|t_0| < t(n-1, \alpha/2)$ のとき棄却しない。$(t_0 > -t(n-1, \alpha/2))$

統計的仮説検定

◦ 正規分布に従う場合の母分散の検定および比率の検定
これらも同様にそれぞれの区間推定を参考にすれば、母分散の検定は、χ^2 分布を、比率の検定では正規分布を使うが、近似が必要であることが分かる。
この講義ではをそれぞれの両側検定の結果だけを挙げることにする。

統計的仮説検定

○ 正規分布に従う場合の母分散の検定
帰無仮説　$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ に対して
対立仮説　$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ とする。
$S = \sum (X_k - \bar{X})^2$ に対して $\dfrac{S}{\sigma^2}$ が自由度 $n-1$ の χ^2-分布に従うので S の実現値 s と自由度 $n-1$ の χ^2-分布の上側 α 点 $\chi^2(n-1, \alpha)$ を用いて

統計的仮説検定

帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
対立仮説 $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
の検定は検定統計量 S の実現値 s に対して
$\dfrac{s}{\sigma_0^2} \leq \chi^2(n-1, 1-\alpha/2)$ または $\dfrac{s}{\sigma_0^2} \geq \chi^2(n-1, \alpha/2)$ のとき有意水準 α で帰無仮説 H_0 を棄却し、
$\chi^2(n-1, 1-\alpha/2) < \dfrac{s}{\sigma_0^2} < \chi^2(n-1, \alpha/2)$ のとき棄却しない。

統計的仮説検定

○ 比率の検定

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同分布で

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{確率 } p \\ 0 & \text{確率 } 1-p \end{cases}$$

という設定でこの p に関する予想を検定したい。

$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ は二項分布 $B(n,p)$ に従いさらに n が十分大きければ、$\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ は標準正規分布で近似できる。

推定の場合は $\sqrt{\ }$ の中の p を X の実現値 x で近似を行ったが、検定の場合は仮説に出てくる p_0 を使用することができる。

統計的仮説検定

$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ の実現値 x (もしくは $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ の実現値 $\bar{x}$) と標準正規分布の上側 α 点 z_α を用いて

統計的仮説検定

帰無仮説 $H_0 : p = p_0$
対立仮説 $H_1 : p \neq p_0$
の検定は検定統計量 X の実現値 x に対して

$$\left| \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \right| = \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \right| \geq z_{\alpha/2}$$

のとき有意水準 α で帰無仮説 H_0 を棄却し、

$$\left| \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \right| = \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \right| < z_{\alpha/2}$$

のとき棄却しない。

統計的仮説検定

◦ 新潟の 8 月の気温の例

何度も書いているが、新潟の 8 月の気温（最高気温、最低気温共に）、ヒストグラムを見た感じでは正規分布に従っているとは思えないので、例としてあまりふさわしくないが、今回も適応してみる。

データは Book1.csv を参照するように。

統計的仮説検定

新潟の 8 月の最高気温に関して、2017 年から 2021 年までの 5 年分のデータ 31×5 日分ある。これらのデータは年ごとに $N(\mu, \sigma^2)$ に従う。前回は σ^2 を既知としたが、今回は未知とする。
区間推定の時にも計算したが、データ数 $=$ 日数 $n = 31$、であり、各年

標本平均 $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ の実現値 $\bar{x}$ を計算すると、

$\bar{x}_{17} = 29.8, \quad \bar{x}_{18} = 30.7, \quad \bar{x}_{19} = 31.7, \quad \bar{x}_{20} = 31.5, \quad \bar{x}_{21} = 30.8$

となり、$V = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$ の実現値 v を計算すると、

$v_{17} = 5.1, \quad v_{18} = 13, \quad v_{19} = 13, \quad v_{20} = 6.7, \quad v_{20} = 13$

になる。このデータに対して、「毎年最高気温は 30 度である」と予想して、これを検定してみる。

統計的仮説検定

帰無仮説 H_0 : $\mu = 30.0$
対立仮説 H_1 : $\mu \neq 30.0$
検定統計量は $T_0 = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{V}}$ であるが、$n = 31$, $\mu_0 = 30.0$ と $\bar{x}, v$ を代入すると

$t_{17} = -0.42, \quad t_{18} = 1.13, \quad t_{19} = 2.59, \quad t_{20} = 3.14, \quad t_{21} = 1.22$

になる。この絶対値と、$t(n-1, 0.025) = t(30, 0.025) = 2.042$ を比較することで、
2017, 2018, 2021 は帰無仮説 H_0 を棄却しないが、
2019, 2020 は帰無仮説 H_0 を棄却する。

統計的仮説検定

第 9 回目の例：例 コイン投げ
ある偏っているコインを 20 回ずつ 500 セット投げた時、表が出た回数の度数分布表が次のようになった。

表	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
回数	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	16
表	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	計
回数	26	43	83	99	110	62	37	15	4	1	500

第 9 回目では $B(20, p)$ を 500 回行ったものを並べなおしたものとみなしたが、
一方で $20 \times 500 = 10,000$ 回コインを投げて、
$0 \times 0 + \cdots + 8 \times 1 + 9 \times 3 + 10 \times 16 + \cdots + 19 \times 4 + 20 \times 1 = 7158$
回表が出たともみなせる。
この結果に対して N 先生はこのコインが表になる確率 p は
$p = 0.70$ であると主張している。
これを検定してみる。

統計的仮説検定

帰無仮説　$H_0 : p = 0.70$
対立仮説　$H_1 : p \neq 0.70$
の検定は $n = 10000$, $X = \sum X_k$ の実現値が $x = 7158$, であるので検定統計量は

$$\left| \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} \right| = \left| \frac{7158 - 10000 \times 0.70}{\sqrt{10000 \times 0.70 \times (1 - 0.70)}} \right| = 3.44\ldots$$

であるが $z_{0.025} = 1.96$ と比較して帰無仮説 H_0 を棄却する。

統計的仮説検定

別のコインで同様なことを行うと

表	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
回数	0	0	0	1	1	1	10	15	40	58	74
表	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	計
回数	76	95	69	31	18	8	3	0	0	0	500

となった。
この結果に対して N 先生はこのコインが表になる確率 p は $p = 0.55$ であると主張している。

問題

この度数分布表に基づいて、N 先生の主張を有意水準 5% で仮説検定せよ。
(電卓等使用可)
表計算ソフトなどを使っても構わないが、どのような計算をするのかや、途中経過を書きいれるように。