応用数理 E 第 13 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

2022 前期

統計的仮説検定

母集団に関する疑わしい仮説が、本当に疑わしいか、疑いきれないかを判断する。
母平均の仮説検定で考え方を見る。
基本的な設定は推定の場合と同じで、
「何らかの理由で分布の形は分かっているが、そのパラメータが分からない。一方で数多くのサンプルを得ることができる。」ことが前提になる。検定の場合は、このパラメータに関して、何か予想があり、その予想が疑わしく思えるが、本当に疑わしいかを知りたい。

統計的仮説検定

○ 仮説検定の基本的な考え方

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立同分布でその分布関数は $F_\theta(x)$ とする。（母平均の仮説検定なので正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$）

疑わしいと判断する基準として有意水準 α を小さい数として決める。

通常 $\alpha = 0.05$ (5%) または 0.01 (1%) である。

(疑わしい) 帰無仮説 H_0 として

(1) $\mu = \mu_0$, (2) $\mu \leq \mu_0$, (3) $\mu \geq \mu_0$

をとる。((1) の場合両側検定、(2)(3) の場合片側検定と呼ぶ)

これを否定する仮説を対立仮説と呼び、H_1 とする。それぞれ

(1) $\mu \neq \mu_0$, (2) $\mu > \mu_0$, (3) $\mu < u_0$ になる。

以下 (1) の場合を考える。

統計的仮説検定

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立同分布で正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うので、その標本平均 $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ を変換した $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

$z_{\alpha/2}$ を標準正規分布の上側 $\alpha/2$ 点として、もし帰無仮説 H_0 が正しければ

$$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

と大きくなり、対立仮説 H_1 が正しければ小さくなる。

$$U_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

とおき検定統計量と呼ぶ。

これまでの議論を逆に読めば、もし帰無仮説 H_0 が正しければその実現値は 0 に近い値を取る確率が多くなり、正しくなければ (絶対値が) 大きい値を取る確率が多くなる。

統計的仮説検定

判断基準として決めた有意水準 α があるので、検定統計量 U_0 の実現値 u_0 に対して、u_0 が $[-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}]$ の間に入っていれば、帰無仮説 H_0 を疑いきれず、入っていれば帰無仮説 H_0 はおかしいと結論付ける。
次のような言い方をする。

統計的仮説検定

統計的仮説検定

(1) 両側検定
帰無仮説 H_0 : $\mu = \mu_0$
対立仮説 H_1 : $\mu \neq \mu_0$
の検定は検定統計量 U_0 の実現値 u_0 に対して
$|u_0| \geq z_{\alpha/2}$ のとき有意水準 α で帰無仮説 H_0 を棄却し、
$|u_0| < z_{\alpha/2}$ のとき棄却しない。
(2)(3) 片側検定
帰無仮説 H_0 : $\mu \leq \mu_0 \quad (\mu \geq \mu_0)$
対立仮説 H_1 : $\mu > \mu_0 \quad (\mu < \mu_0)$
の検定は検定統計量 U_0 の実現値 u_0 に対して
$u_0 \geq z_\alpha$ のとき有意水準 α で帰無仮説 H_0 を棄却し、 $(u_0 \leq -z_\alpha)$
$u_0 < z_\alpha$ のとき棄却しない。$(u_0 > -z_\alpha)$

統計的仮説検定

統計的仮説検定では帰無仮説を棄却する（おかしいという）ことはできるが、肯定することはない。あくまでも、棄却しない（おかしいとはいえない）としか言わない。

区間推定との関係

母平均の信頼係数 $1-\alpha$ の区間推定と比較することで、実際に同じことをしていることが分かる。

μ_0 の仮定が、区間推定の範囲内に入っていれば、帰無仮説 H_0 を棄却せず、範囲外に入れば棄却する。

統計的仮説検定

○ 新潟の 8 月の気温の例

何度も書いているが、新潟の 8 月の気温（最高気温、最低気温共に）、ヒストグラムを見た感じでは正規分布に従っているとは思えないので、例としてあまりふさわしくないが、今回も適応してみる。

データは Book1.csv を参照するように。

統計的仮説検定

新潟の 8 月の最高気温に関して、2017 年から 2021 年までの 5 年分のデータ 31×5 日分ある。これらのデータは年ごとに $N(\mu, \sigma^2)$ に従うが、σ^2 は 5 年分の標本分散で代用して、$\sigma^2 = v^2 \cong 10.3$ として代用する。また有意水準は 0.05 (5%) を使用する。区間推定の時にも計算したが、標本平均 $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ の実現値 $\bar{x}$ は

$$\bar{x}_{17} = 29.8, \quad \bar{x}_{18} = 30.7, \quad \bar{x}_{19} = 31.7, \quad \bar{x}_{20} = 31.5, \quad \bar{x}_{21} = 30.8$$

である。

このデータに対して、「毎年最高気温は 30 度である」と予想して、これを検定してみる。

統計的仮説検定

帰無仮説 $H_0 : \mu = 30.0$
対立仮説 $H_1 : \mu \neq 30.0$
検定統計量は $U_0 = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ であるが、$n = 31$, $\sigma^2 = 10.3$ と $\bar{x}$, $\mu_0 = 30.0$ を代入すると
$\bar{u}_{17} = -0.30, \quad \bar{u}_{18} = 1.26, \quad \bar{u}_{19} = 2.90, \quad \bar{u}_{20} = 2.51, \quad \bar{u}_{21} = 1.37$
になる。この絶対値と、$z_{0.025} = 1.96$ を比較することで、2017, 2018, 2021 は帰無仮説 H_0 を棄却しないが、2019, 2020 は帰無仮説 H_0 を棄却する。

統計的仮説検定

問題

最高気温と同様に最低気温に関しても 5 年分有意水準 5% で仮説検定をせよ。但し σ^2 は 5 年分の標本分散で代用して、
$\sigma^2 = v^2 \cong 5.4$ とする。
これに対して、「毎年最低気温は 25 度である」と予想して仮説検定せよ。（電卓等使用可、付表を使う）
前回と同様、表計算ソフトなどを使って構わないが、どのような計算をするのかや、途中経過を書き入れるように。