

応用数理 E 第 7 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

2022 前期

相関、大数の法則、中心極限定理

前回からの続き

問題

連続型一様分布 $U(a, b)$ 、指数分布 (パラメータ α とする)、正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 、に対して、期待値、分散を求めよ。

相関、大数の法則、中心極限定理

定理 3.4

$X_1, X_2, \dots, X_n$ を独立同分布で、

$$E[X_1] = \mu, \quad V[X_1] = \sigma^2$$

とすると標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

に対して、

$$E[\bar{X}] = \mu, \quad V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

問題

定理 3.4 を証明せよ。

相関、大数の法則、中心極限定理

共分散は X と Y の関係性を見ているが、そのままでは分かりにくい。無次元量である相関係数で見るのが自然。

定義

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

を相関係数と呼ぶ。

問題

確率変数 X, Y , 定数 a_1, a_2, b_1, b_2 に対して、

$$\rho(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = \rho(X, Y)$$

を示せ。

相関、大数の法則、中心極限定理

定理 3.5

相関係数は

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

$\rho(X, Y) = 1$ ならばほぼ $P(X = Y) = 1$

$\rho(X, Y) = -1$ ならばほぼ $P(X = -Y) = 1$

問題

相関関係と、因果関係に関して、とくにその間の関係に関して、調べよ。

相関、大数の法則、中心極限定理

統計学は基本的に次の2つの極限定理を基礎にしている。

大数の法則

$X_1, X_2, \dots, X_n$ を独立同分布として

$$E[X_1] = \mu, \quad V[X_1] = \sigma^2$$

とすると標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

は、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) = 0$$

相関、大数の法則、中心極限定理

中心極限定理

$X_1, X_2, \dots, X_n$ を独立同分布として

$$E[X_1] = \mu, \quad V[X_1] = \sigma^2$$

とすると標本平均

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\bar{X} - E[\bar{X}]}{\sqrt{V(\bar{X})}} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq x\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$