

応用数理 E 第 2 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

2022 前期

確率、条件付確率

まず初めに、漢字「確率」と「確立」に十分気を付けるように。
多くの漢字変換ソフトでは後者の方がよく出てくる。

確率、条件付確率

確率を数学的に取り扱うために用語を定義して、その基本性質をまとめる。

確率論は数学的には、集合論や測度論の応用になる。

確率、条件付確率

以下、用語：よく使う記号：簡単な解説、の順で書く。

用語

全事象： Ω ：対象とする全体

事象： A, B ：(全事象の) 部分集合

空集合、空事象： $\emptyset$ ：何も起こらないこと

確率： $P(A), P(B)$ ：

試行： $::$ 偶然に支配されると考えられる実験や観測

根元事象： ω ：これ以上分けることが無意味な事象

和事象： $A \cup B$ ： A または B である事象

積事象： $A \cap B$ ： A かつ B である事象

余事象： A^c ： A でない事象

排反事象： $::$ 同時には起きない事象

確率、条件付確率

例 $\{0, 1\}$ 3 個の列

次のように名前を付ける

$$\omega_0 = 000, \quad \omega_1 = 001, \quad \omega_2 = 010, \quad \omega_3 = 011$$

$$\omega_4 = 100, \quad \omega_5 = 101, \quad \omega_6 = 110, \quad \omega_7 = 111$$

このように置くと $\omega_i, 0 \leq i \leq 7$ は根元事象になり、

$$\Omega = \{\omega_i : 0 \leq i \leq 7\}$$

が全事象になる。

事象として

A : 1 が 1 個 B : 最初が 0 C : 最初が 1

とすると

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \quad B = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \quad C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$$

$$\text{また } B \cup C = \Omega, \quad B \cap C = \emptyset, \quad B^c = C, \quad B = C^c$$

$$A \cap C = \{\omega_4\}, \quad A \cup B = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

全ての根元事象が等確率ならば

$$P(A) = \frac{3}{8}, \quad P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

(この確率を出すのには以下にある基本性質を使っている)

問題

例を拡張して $\{0, 1\}$ 10 個の列を考える。

(1) どのように名前を付ければよいかその方法（アルゴリズム、考え方）を与えよ。

(2) 例で与えた A, B, C は（日本語で書かれた部分は）この問題でも意味を持つので、(1) の名前の付け方でどのように書けるか与えよ。

(3) $P(A), P(B), P(C)$ を与えよ。

確率、条件付確率

通常以下を確率の定義とするが、教科書にならって基本性質とする。

確率の基本性質

- (1) 任意の事象 A に対して $0 \leq P(A) \leq 1$
- (2) $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$
- (3) A, B が排反ならば $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

確率、条件付確率

この基本性質から以下のことが従う

定理 1.1

- (1) 事象 A, B が $A \subset B$ ならば $P(A) \leq P(B)$
- (2) 互いに排反な $A_1, A_2, \dots, A_n$ に対して
$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$
- (3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- (4) 一般に $P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$
- (5) $P(A^c) = 1 - P(A)$.

問題

定理 1.1 の証明を与えよ。

確率、条件付確率

事象 A が起こった条件の下での B が起こる確率を考える。

定義

事象 A が $P(A) > 0$ とする。この事象 A が起こった時の条件付確率 $P_A(B)$ を以下で定義する

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

この定義から

定理 1.2

$P_A(\cdot)$ は確率の基本性質を満たす。

確率、条件付確率

現象に対応するような確率モデルを考えるときには、因果関係に基づいて条件付確率を使ってモデルを作ることが多い。

例えば N 先生がお昼休みに他の誰か (A さん) に会う確率のモデルを考えるときには、(A さんの情報に依存するが) 和食料理店に行って会う時の確率と、中華料理店に行って会う確率で、違う確率になりそうであり、それぞれに良い確率を与えてモデルを作った方が良いモデルになると思われる。

このような作り方では、因果関係、「どのお店に行ったか」に対して条件付確率を与えることになる。

一方で条件付確率の定義には因果関係は全く関係ないことに注意する。さらに言えば因果関係が逆転していても定義はできることに注意する。

病気の診断の例

A さんが病気にかかった時には病院に行き、診察を受ける。この時、当然何らかの病気にかかっている、診察を受けたからと言って病気（の種類）が変わることはない。時期にもよるが、どの病気にかかっているかに関しては、ある確率モデルを考えることができる。簡単のために2つの病気 D_1, D_2 だけのモデルとする。病院では問診やその他各種機材などを使うことで、どちらの病気にかかっているかを推定して、その病気にあった対処法（薬）を選択する。

これらの問診などででてくる症状が複数考えられるがこれを順に $S_1, S_2, \dots, S_k$ としよう。もちろんこれらは互いに排反で必ずどれかに当てはまるように設定してあるものとする。

確率、条件付確率

病気とその症状を考えれば普通は病気が原因であり、症状がその結果として出てくる因果関係があると考えるのが自然である。病気 D_1, D_2 と症状 $S_1, S_2, \dots, S_k$ に対して、確率 $P(D_1), P(D_2)$ と、条件付確率 $P_{D_1}(S_i), P_{D_2}(S_i)$ を決めればこの確率モデルは意味を持つ。

一方で医者立場から見れば、患者である A さんがどの症状 S_i であるかから、どちらの病気にかかっているかを判断するわけであるが、当然 $P(D_1 \cap S_i) > 0$ でありかつ $P(D_2 \cap S_i) > 0$ になるモデルが自然なモデルであろう。このときどちらの病気にかかっているかを判断するのが合理的かと言われれば、 $P(D_1 \cap S_i)$ と $P(D_2 \cap S_i)$ を比較して、値が大きいほうにかかっていると判断するだろう。

確率、条件付確率

これを条件付確率の言葉で言い換えれば

$$P_{S_i}(D_1) = \frac{P(S_i \cap D_1)}{P(S_i)}, \quad P_{S_i}(D_2) = \frac{P(S_i \cap D_2)}{P(S_i)}$$

がそれぞれ定義でき、その大きいほうを選んでいると思える。これはその症状が出たときにどちらの病気にかかっているかの条件付確率を考えて、その確率の大きいほうを選んでいると思える。この条件付確率は、因果関係でいえば、結果（症状）を仮定して、その条件の下での原因（病気）の確率を与えていることになる。

（注意：確率モデルを考える場合は、神様になって全てを知っているとして、モデルを作る。一方で現実問題に適用するためには、その性質をある程度調べて、（少ない）パラメータの入ったモデルを作り、実際のデータからそのパラメータを推定して使うことになる。）

確率、条件付確率

条件付確率の定義を書き換えることにより

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

と書けるが、これをつなげることで、

定理 1.3

$$P(\cap_{i=1}^n A_i) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

確率、条件付確率

事象の独立は感覚的には分かるが、実際問題に適用しようとする
と、想定外のことが起こるので、数学としての事象の独立は次の
ように定義する

定義

事象 A, B が独立

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

事象が複数個になると定義自体も複雑にしないと同様に想定外の
ことが起こる。

定義

事象 $A_1, A_2, \dots, A_n$ が互いに独立

任意に k 個 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ と取った時

$$P(\cap_{j=1}^k A_{i_j}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

確率、条件付確率

現実問題として考えて2つの事象、例えば A : 明日雨が降る、 B : スリッパを蹴って表が出るが独立かどうかを判定することは非常に難しい。一方で、確率モデルを作った場合には、そのモデルにおいて

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立てば独立であり、成り立たなければ独立でない、とするしかない。

確率、条件付確率

例次のような確率モデルを考える

全事象 Ω に対して根元事象を $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8$ とする。

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = P(\omega_4) = 0.1,$$

$$P(\omega_5) = P(\omega_6) = P(\omega_7) = P(\omega_8) = 0.15$$

とすると確率モデルになっている。

$$A_1 = \{\omega_1, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, A_2 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_7\}, A_3 = \{\omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7\}$$

とすると

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0.5,$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = 0.25$$

になっているが、

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.1 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

である。

つまり A_1, A_2, A_3 のうちどの2つの事象を取ってきても独立であるが、 A_1, A_2, A_3 は互いに独立にはならない。

問題

前ページの例で根元事象と A_1, A_2, A_3 の設定は変えないものとする。さらに

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0.5$$

の条件を変えないまま、 A_1, A_2, A_3 が互いに独立になるように確率モデルを変更できるか？ ($P(\omega_i)$ を変更できるか？)

可能であればそのモデルを（必要であればパラメータを使って）全て与え、不可能であれば、不可能である理由を述べよ。

定理 1.4

事象 A, B が独立ならば

- (1) A, B^c は独立
- (2) A^c, B^c は独立