

確率的感染症モデル 第5回

永幡幸生
新潟大学

nagahata@eng.niigata-u.ac.jp

2022 前期

スケール極限

第1回目のスライドでは感染症モデルとして基本的に使われる SIR モデルを取り上げた。このモデルは総人口を N 人として、非感染者数 S 、感染者数 I 、復帰者数 R の時間発展を取り扱ったが、数理モデルでよく表れることとして、 N が十分大きければ、(同じようなパラメータ設定の下で) 同じような現象 (グラフ) が表れることがあり、何らかの意味で極限を取ったモデルを取り扱い、その結果として出てくる現象が、このモデルの特徴を表していると思われる。もちろん単純に $N \rightarrow \infty$ の極限をとっても S, I, R それぞれの値が大きくなり発散するだけで意味を持たないであろう。一方で第1回目のグラフの書き方から分かるように S, I, R の相対比率すなわち $s(t) = S(t)/N, i(t) = I(t)/N, r(t) = R(t)/N$ を見て、極限を取るのがよさそうである。

スケール極限

実際に確率モデルの SIR モデルに対して

$s(t) = S(t)/N, i(t) = I(t)/N, r(t) = R(t)/N$ と変数変換してみよう。

SIR モデルに対応する生成作用素 L は

$$\begin{aligned}Lf((x, y, z)) = & \beta xy \{f((x-1, y+1, z)) - f((x, y, z))\} \\ & + \gamma y \{f((x, y-1, z+1)) - f((x, y, z))\}\end{aligned}$$

であり、それぞれ x, y, z が S, I, R に対応していた。

確率論としてはこのまま連続時間の確率解析を行う方が自然であるが、このスライドでは離散時間の解析にとどめているので、今までのスライドの話で解析を進めることにする。

スケール極限

モデルに現れるパラメータは、 β, γ の2つであるが、感染者一人一人が治癒して復帰することを表すパラメータ γ は N に依らない定数と思っている。一方で実行再生産数の定義を見れば分かるように $R_t = \frac{\beta S(t)}{\gamma}$ 、もしくは近似をして $R = \frac{\beta N}{\gamma}$ がほぼ定数と思ってモデルを作っている。

このためパラメータに関して、「 $\gamma, \beta N$ は N に依らない定数である。」を仮定する。

スケール極限

第2回目のスライドの逆向きに L から Q の非対角部分を定義すると

$$Q_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \begin{cases} \beta_{\mathbf{x}\mathbf{y}} & \text{if } \mathbf{x} = (x, y, z), \mathbf{y} = (x-1, y+1, z) \\ \gamma_{\mathbf{y}} & \text{if } \mathbf{x} = (x, y, z), \mathbf{y} = (x, y-1, z+1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

になる。対角部分は

$$Q_{\mathbf{x},\mathbf{x}} = - \sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{x}} \Delta t Q_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$$

になることに注意する。

スケール極限

これから時間の分割 Δt は十分小さくとしているものとして $\tilde{P}(\Delta t)$ を

$$(\tilde{P}(\Delta t))_{x,y} = \Delta t Q_{x,y}$$

と定義すると微小時間 Δt での推移確率行列を与えたことになる。パラメータ β, γ に関する仮定と、 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ としたときの x, y は N に比例する量であることを合わせると、 Δt は $O(1/N)$ にとって、ようやく $\tilde{P}$ が確率行列になる。この離散時間 Markov 連鎖の $O(N)$ ステップ後の値を見ると、対応する連続時間 Markov 連鎖の時刻 1 での値（の近似値）を見ていることに対応する。一方で、このオーダーの値自体にあまり意味はなく、もっと短い時間間隔の確率行列を考えて、対応するもっと多いステップ数を動かしても構わない。

連続時間 Markov 連鎖の時刻 a での値の近似値は $\tilde{P}(\Delta t)$ で与えられる離散時間 Markov 連鎖の $a/\Delta t$ ステップの値で与えられる。

スケール極限

Q が自然に確率行列にならなかったために時間変更を行ってしまったために3回目に行った確率解析の結果を使うためには、 $\tilde{P}$ もしくは $\tilde{Q}$ に対応する生成作用素をとる必要がある。

推移確率行列 $\tilde{P}(\Delta t)$ に対応する生成作用素は

$$\begin{aligned}\tilde{L}f(\mathbf{x}) &= \tilde{L}(\Delta t)f(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{x}} (\tilde{P}(\Delta t))_{\mathbf{x},\mathbf{y}} (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})) \\ &= \Delta t \sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{x}} Q_{\mathbf{x},\mathbf{y}} (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}))\end{aligned}$$

和の形で書いたが、 Q の非対角部分の定義からこの和は実際には高々2つの項しかないことに注意する。

スケール極限

$\tilde{P}(\Delta t)$ を推移確率行列とする Markov 連鎖を $(\mathbf{X}_n)$ と書くことにするが、 $\mathbf{X}$ としたのは $\mathbf{X} = (S, I, R)$ と 3次元のベクトルでそれぞれが非感染者数、感染者数、復帰者数を表しているからである。自然に 3次元のベクトルの第 i 成分を表す関数 $h_i(\mathbf{x}) = x_i$ を使えば $S = h_1(\mathbf{X})$, $I = h_2(\mathbf{X})$, $R = h_3(\mathbf{X})$ であるが、今回みたいなのは S, I, R の相対比率なので $f_i = \frac{1}{N} h_i$ として

$$s = s_N = f_1(\mathbf{X})$$

$$i = i_N = f_2(\mathbf{X})$$

$$r = r_N = f_3(\mathbf{X})$$

を見る。

スケール極限

第3回目のスライドで見たように Markov 連鎖とその対応する生成作用素からマルチンゲールを構成する。 $i = 1, 2, 3$ に対してそれぞれ

$$f_i(\mathbf{X}_k) = f_i(\mathbf{X}_0) + \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{L}f_i(\mathbf{X}_s) + (M_i)_k$$

もしくは

$$(M_i)_k = f_i(\mathbf{X}_k) - f_i(\mathbf{X}_0) - \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{L}f_i(\mathbf{X}_s)$$

と定義する。

スケール極限

このマルチンゲール (M_i) の 2 次変分を $[M_i]$ と書くと、2 次変分の定義から

$$[M_i]_k = \sum_{s=0}^k \{(M_i)_s - (M_i)_{s-1}\}^2 = \sum_{s=0}^k [\{f_i(\mathbf{X}_s) - f_i(\mathbf{X}_{s-1})\} - \tilde{L}f_i(\mathbf{X}_{s-1})]^2$$

であるが、1 ステップでは $\mathbf{X}_k$ の各成分は 1 変化するか、変化しないかしかなく、変化する確率は Δt に比例する。 f_i の定義は i 成分を $1/N$ 倍したものだから $|f_i(\mathbf{X}_s) - f_i(\mathbf{X}_{s-1})|$ は $1/N$ 変化するか、変化しないかのどちらかで、変化する確率は Δt に比例してある定数 C_1 が存在して、任意の $i = 1, 2, 3, s \geq 0$ に対して

$$E[|f_i(\mathbf{X}_s) - f_i(\mathbf{X}_{s-1})|^2] \leq C_1 \frac{\Delta t}{N^2}$$

と評価できる。

スケール極限

一方で $\tilde{L}$ の定義から

$$\tilde{L}f_1((x, y, z)) = \Delta t \left\{ -\beta xy \frac{1}{N} \right\}$$

$$\tilde{L}f_2((x, y, z)) = \Delta t \left\{ \beta xy \frac{1}{N} - \gamma y \frac{1}{N} \right\}$$

$$\tilde{L}f_3((x, y, z)) = \Delta t \left\{ \gamma y \frac{1}{N} \right\}$$

でありパラメータ β, γ の仮定と $0 \leq x, y \leq N$ であることに注意すれば定数 C_2 が存在して任意の $i = 1, 2, 3$, と任意の時刻 s に対して次の評価が成り立つ

$$|\tilde{L}f_i(\mathbf{X}_{s-1})| \leq C_2 \Delta t$$

スケール極限

これらの評価を合わせて、 $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ を使えば、任意の $i = 1, 2, 3$, と任意の時刻 a に対して次の評価が成り立つ

$$\begin{aligned} E[[M_i]_{a/\Delta t}] &\leq \sum_{s=0}^{a/\Delta t} 2 \left\{ E[\{f_i(\mathbf{X}_s) - f_i(\mathbf{X}_{s-1})\}^2] + E[|\tilde{L}f_i(\mathbf{X}_{s-1})|^2] \right\} \\ &\leq \sum_{s=0}^{a/\Delta t} 2 \left\{ C_1 \frac{\Delta t}{N^2} + C_2^2 (\Delta t)^2 \right\} \leq a \left\{ C_1 \frac{1}{N^2} + C_2^2 \Delta t \right\} \end{aligned}$$

ここで $\Delta t \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) であることに注意する。

スケール極限

バークホルダーの不等式を合わせると

$$E\left[\max_{0 \leq s \leq a/\Delta t} |M_s|^2\right] \leq CE[[M]_2] \leq aC\{C_1 \frac{1}{N^2} + C_2^2 \Delta t\} \rightarrow 0, \quad (N \rightarrow \infty)$$

という評価を得るから、元に戻って

$$f_i(\mathbf{X}_{a/\Delta t}) = f_i(\mathbf{X}_0) + \sum_{s=0}^{(a/\Delta t)-1} \tilde{L}f_i(\mathbf{X}_s) + (M_i)_{a/\Delta t}$$

と書いたときのマルチンゲール項 $(M_i)_{a/\Delta t}$ は $N \rightarrow \infty$ で消える誤差項だと思えることができる。

スケール極限

誤差項としたマルチンゲール項を省略して $\tilde{L}f_i$ の計算結果を代入することで

$$s(a/\Delta t) = s(0) + \sum_{u=0}^{(a/\Delta t)-1} \Delta t \{-\beta N s(u) i(u)\}$$

$$i(a/\Delta t) = i(0) + \sum_{u=0}^{(a/\Delta t)-1} \Delta t \{\beta N s(u) i(u) - \gamma i(u)\}$$

$$r(a/\Delta t) = s(0) + \sum_{u=0}^{(a/\Delta t)-1} \Delta t \{\gamma i(u)\}$$

と書ける。

スケール極限

実際問題としては漸化式として

$$s(t_n) = s(t_{n-1}) + \Delta t \{-\beta N s(t_{n-1}) i(t_{n-1})\}$$

$$i(t_n) = i(t_{n-1}) + \Delta t \{\beta N s(t_{n-1}) i(t_{n-1}) - \gamma i(t_{n-1})\}$$

$$r(t_n) = s(t_{n-1}) + \Delta t \{\gamma i(t_{n-1})\}$$

として $t_0 = 0, t_1 = 1, \dots, t_n = n = a/\Delta t$ と順次おこなった結果
を見ていることになる。

スケール極限

これは $a/\Delta t$ が元の時間での a に対応していることに注意すれば、微分方程式系

$$\dot{s}(t) = -\beta N s(t) i(t)$$

$$\dot{i}(t) = \beta N s(t) i(t) - \gamma i(t)$$

$$\dot{r}(t) = \gamma i(t)$$

の時間幅を Δt としたときのオイラー法（オイラー近似）による解法を与える漸化式になっている。すなわちこの離散時間 Markov 連鎖の極限は $N \rightarrow \infty$ で微分方程式の解に収束する。

問題

オイラー法を中心に、漸化式による微分方程式の（近似）解法に関して調べよ。

スケール極限

このスライドのはじめにも書いたように、 $N \rightarrow \infty$ の極限をとることで、この現象の特徴を表しているといったが、確率モデルとして定式化した SIR モデルにおいては微分方程式の SIR モデルが特徴づけられる。

実際微分方程式の SIR モデルは整数値しかとらない現象を書き表すには少しギャップがあったが、このような極限を通して特徴を捉えた方程式であると考えると非常に自然に見える。