

# 確率的感染症モデル 第4回

永幡幸生  
新潟大学

nagahata@eng.niigata-u.ac.jp

2022 前期

# 関連した確率モデル

第1回目のスライドでは感染症モデルとして基本的に使われる SIR モデルを取り上げた。このモデルはその名前でも使われている3つの状態の（人数を表す）確率変数のシステムであった。これに対して、生物の個体数を取り扱うという意味では同じようなものになり、1つの確率変数で表されるような出生死滅過程と分枝過程を取り上げる。この2つの確率過程は離散時間版、連続時間版ともにあるが、ともに数学として非常によく研究されていて、より複雑な確率過程を解析するための道具としても使われている。

# 関連した確率モデル

## 出生死滅過程

出生死滅過程はその名前が指すように、(ある特定の) 生物の個体数を取り扱うモデルである。基本的に連続時間版がメインになるため、生成作用素を用いた書き方とする。

状態空間を  $S = \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  と非負の整数値とする。数列  $\{p_i\}_{i \geq 0} > 0$  と  $\{q_i\}_{i \geq 1} > 0$  が与えられたとき、生成作用素を

$$Lf(x) = \begin{cases} p_0\{f(1) - f(0)\} & \text{if } x = 0 \\ p_x\{f(x+1) - f(x)\} + q_x\{f(x-1) - f(x)\} & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

で与える。

このモデルにおいて数列  $\{p_i\}, \{q_i\}$  は真に正としたが  $p_0 = 0$  とすることはよくあるが、これは取り扱う生物モデルや、解析のしやすさに応じて設定する。

# 関連した確率モデル

このモデルにおける  $X_t$  は時刻  $t$  での生物の個体数を取り扱っている。(話は逆であるが) SIR モデルの時も同じように考えたが、個体数が  $x$  であるときに、瞬間的に(理想的に)見れば、個体数の増減は1単位ずつおき、さらにその増加(出生)と減少(死滅)の比率は現在の個体数  $x$  に依存していると思える。この比率に関して自由度を残したモデルと思える。

一番単純な例として全ての  $x$  に対して  $p_x = q_x = 1/2$  ととれば対称な連続時間ランダムウォークになり、全ての  $x$  に対して

$p_x = p, q_x = 1 - p$  ととれば非対称な連続時間ランダムウォークになる。これらの場合は対応する離散時間ランダムウォークと似たような動きをすることが知られている。

# 関連した確率モデル

これに対して全ての  $x$  に対して  $p_x = q_x$  ではあるが  $x \neq y$  では  $p_x \neq p_y$  となるようなことも考えられる。例えば  $p_x = \frac{1}{4}(1 + e^{-x})$  (定数  $1/4$  にあまり意味はない) のように単調減少になるような例をとると、個体数  $x$  が少ないときに比べて、個体数  $x$  が多いほうが個体数の変動が少ないもでるになり、逆に  $p_x = \frac{1}{4}(2 - e^{-x})$  のように単調増大になるような例をとると、個体数が多いほど個体数の変動が多い例を作ることができる。

# 関連した確率モデル

一度この生物が絶滅すると、その後は個体数は 0 であるという自然な仮定を付ける場合には、 $p_0 = 0$  とする。一方で、ある特定の地域内での個体数を取り扱っている場合には、移住してくる可能性があるためある時期絶滅していたが、その後また個体数を増やしてもおかしくないため  $p_0 > 0$  のモデルも考えられる。

またモデルとしての整合性よりも、解析のしやすさを考慮して、 $p_0$  の値を決める場合もあり、その場合はこの生物が絶滅する時間  $\tau = \min\{t; X_t = 0\}$  は停止時刻になるので、この停止時刻までを解析するといったように、うまく問題を設定する。

# 関連した確率モデル

全く同様に解析のしやすさを考慮すると、 $S$  が無限集合であるよりも、有限集合である方がよい。このため最大値  $N$  を設定して  $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  として生成作用素を

$$Lf(x) = \begin{cases} p_0\{f(1) - f(0)\} & \text{if } x = 0 \\ p_x\{f(x+1) - f(x)\} + q_x\{f(x-1) - f(x)\} & \text{if } x \neq 0, N \\ q_N\{f(N-1) - f(N)\} & \text{if } x = N \end{cases}$$

として  $N$  に到達する時刻  $\sigma = \min\{t; X_t = N\}$  を設定して、 $\sigma$  までは、もしくは  $\tau \wedge \sigma$  までを解析するといった問題設定をすることがある。

# 関連した確率モデル

この問題設定においては、 $P(\tau < \infty) = 1$  か、 $P(\tau < \infty) < 1$  であるかの違い、つまり、この生物が必ず絶滅するのか、（間違っても確率的に絶滅することもあるが）生き延びられるのかの違いをパラメータ  $\{p_n\}, \{q_n\}$  で判定することが一番知りたいことである。このことに関しては既に知られていて、さらに絶滅する場合に平均絶滅時間が発散するか収束するか、つまり  $E[\tau] = \infty$  か  $E[\tau] < \infty$  かの判定まで良く知られている。

一般的に Markov 連鎖においては、再帰的、推移的という2つの性質に分類され、さらに再帰的を零再帰的、正再帰的の2つの性質に分類するが、この授業で一般的な定義は行わないが、出生死滅過程においては、絶滅する場合  $P(\tau < \infty) = 1$  が再帰的、 $P(\tau < \infty) < 1$  が推移的に分類されて、平均再帰時間が発散する場合  $E[\tau] = \infty$  を零再帰的収束する場合  $E[\tau] < \infty$  を正再帰的と呼ぶ。



# 関連した確率モデル

## 定理 再帰性

出生死滅過程において

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{q_k}{p_k} \quad \begin{cases} = \infty & \text{再帰的} \\ < \infty & \text{推移的} \end{cases}$$

さらに再帰の場合に

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{p_{k-1}}{q_k} \quad \begin{cases} = \infty & \text{零再帰的} \\ < \infty & \text{正再帰的} \end{cases}$$

と分類される。

## 関連した確率モデル

直感的に分かるように全ての  $n$  で  $p_n < q_n$  であれば、生物の個体数は減りやすい設定になっているので絶滅しやすく、 $p_n > q_n$  であれば、生物の個体数は増えやすい設定なので、絶滅しないだろう。一方絶滅しないような設定においては、この生物の個体数は爆発するだろう。 $p_n = q_n$  の場合は一つ目の和の各項が 1 になるので和は発散することから再帰的、すなわち絶滅することは分かるが、さらに  $p_n = p_{n+1}$  すなわち対称連続時間ランダムウォークの設定では二つ目の和の各項も 1 になるのでやはり和が発散して零再帰的であることが分かる。

# 関連した確率モデル

## 問題

出生死滅過程において、全ての  $n$  に対して  $p_n = q_n$  とすると再帰的である。 $p_n \neq p_{n+1}$  とすることにより正再帰的になるような  $\{p_n\}$  の例を挙げよ。

# 関連した確率モデル

## 分枝過程

分枝過程は Golton-Watson 過程や、Golton-Watson 分枝過程とも呼ばれ、（貴族などの）家系が末代まで続くか、ある世代でとどめるかを表す確率モデルである。

初期値として第 0 世代の（男子の）人数と、各子孫が何人の（男子の）子供を持つかの分布を与えることによりこのモデルは与えられる。

# 関連した確率モデル

初期値として正整数値確率変数  $Z_0$  を与え、第  $k$  世代の  $j$  人目の子孫がもつ子供の数を表す確率変数  $X_{k,j}$  を与える。解析の都合上  $X_{k,j}$  は添え字  $k, j$  に関して独立同分布を仮定することが多い。このとき分枝過程  $Z_n$  は帰納的に

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{n,j}$$

と定義する。

この書き方から自然に  $Z_n$  は第  $n$  世代の子孫の人数を表していて、ある  $n$  で  $Z_n = 0$  であれば  $Z_{n+1} = 0$  になるため、ある世代で子孫の数が 0 になればそれ以降も子孫の数も 0 になり、これは子孫が途絶えることに対応する。

# 関連した確率モデル

このモデルに関しては、当然のように、家系が末代まで続くか、ある世代でとどめるかに焦点がいくが、実際には、( $Z_0 = 1$  としたとき) 家系が末代まで続く確率まで求められている。

## 定理 分枝過程の絶滅確率

$m = E[X_{n,j}]$  とすると

$m \leq 1$  ならば確率 1 で絶滅する。

$m > 1$  ならば  $Z_0 = 1$  の時の絶滅確率がある方程式の解として与えられる。

## 問題

定理においてはある方程式の解としたが、この方程式を調べよ。

# 関連した確率モデル

この定理の仮定では  $m = E[X_{n,j}]$  としたので、子孫が一人当たり平均的に  $m$  人の子供を残すことになる。この数が多く、 $m > 1$  ならば子孫の数は増えやすく、 $m < 1$  ならば減りやすい。 $m = 1$  のとき増減がないように見えるが、確率的な変動により、家系が途絶えてしまうだろうと直感的に思える。実際に  $Y_k = m^{-k} Z_k$  はマルチンゲールになる。

つまり  $m \neq 1$  であれば子孫の数  $Z_k$  は ( $m < 1$  で) 指数的に減衰するか、( $m > 1$  で) 指数的に爆発するかであり、 $m = 1$  のとき  $Z_k = Y_k$  とマルチンゲールになる。

## 問題

$Y_k = m^{-k} Z_k$  がマルチンゲールになることを示せ。