

確率的感染症モデル 第3回

永幡幸生
新潟大学

nagahata@eng.niigata-u.ac.jp

2022 前期

マルチンゲール

確率現象を数学的に解析するに当たって非常に有効な手段はマルチンゲールを用いた解析である。マルチンゲールを定義するには条件付期待値を定義する必要がある。

前回出てきたように高校の数Iの範囲の割り算で定義する条件付確率

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

で話が済めばそれで十分であるが、離散時間の確率過程でも状態空間が実数値になるような場合には自然に $P(B) = 0$ になる。

マルチンゲール

例えば時間的に一様な Markov 連鎖のモデルとして、現在 x にいるとき、次の時間では $x + Z$ の位置にいる。ただし $Z \cong N(0, 1)$ に従う。つまり毎時間単位毎に平均 0 分散 1 に従う（独立な）正規分布を足していくことを考える。この書き方だと well-defined であるが、マルコフ連鎖の定義に当てはめようとする、直感的には

$$P(X_{n+1} \in [x + a, x + b] | X_n = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\} dz$$

で正しそうだが、当然 $P(X_n = x) = 0$ であり、意味があるのかなのか不明である。

これに上手く意味を付けるのが、条件付期待値であるが、直感的には $P(B) \neq 0$ のところだけ意味を持っていて、 $P(B) = 0$ になった時もうまく行きそうに拡張されていると思って構わない。

数学的な定式化に関しては例えば「確率論（舟木直久、朝倉出版）」などを参照することにする。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間、 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ -加法族とする。事象 B に対して確率変数 1_B を

$$1_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in B \\ 0 & \omega \notin B \end{cases}$$

として、確率変数 X と事象 B に対して

$$E[X, B] = E[X1_B]$$

とする。

定義 条件付期待値

可積分な確率変数 X に対して以下の (1)(2) を満たす Y を条件付期待値と呼び $E[X|\mathcal{G}]$ と書く

(1) $B \in \mathcal{G}$ であれば $E[X, B] = E[Y, B]$

(2) Y は $\mathcal{G}$ -可測な確率変数

なおこのように (1)(2) を満たす Y は P a.s. の意味で一意的に存在することが知られている。

事象 A に対して $X = 1_A$ とすることで条件付確率 $P(A|\mathcal{G})$ を考えることができる。

割り算で条件付確率が定義できるような $\mathcal{G}$ が有限分割のときにはこの性質を満たすので、自然な拡張になっている。

定理 条件付期待値の性質 (続く)

X, Y は可積分な確率変数とすると、以下を満たす。

(1) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[Y|\mathcal{G}], \text{ a.s.}$$

(2) $X \geq 0$ a.s. ならば $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$ a.s.

(3) X が $\mathcal{G}$ 可測で XY が可積分ならば

$$E[XY|\mathcal{G}] = XE[Y|\mathcal{G}], \text{ a.s.}$$

特に X が $\mathcal{G}$ 可測ならば $E[X|\mathcal{G}] = X$ である。

定理 条件付期待値の性質（続き）

(4) 部分 σ 加法族が $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を満たせば

$$E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}], \text{ a.s.}$$

特に $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$ である。

(5) X と $\mathcal{G}$ が独立であれば $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ a.s. である。

(6) ϕ は下に凸な関数で $\phi(X)$ も可積分とすると

$$\phi(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[\phi(X)|\mathcal{G}], \text{ a.s.}$$

この定理の証明は可測性の部分が重要であり、この授業で扱うには少しそぐわない。詳しい話は例えば「確率論（舟木直久、朝倉出版）」を参照してほしい。

マルチンゲール

定義 フィルトレーション

$\mathcal{F}$ の部分 σ -加法族の単調増加列 $(\mathcal{F}_n), (n = 0, 1, 2, \dots)$ をフィルトレーション、増加情報系、情報系などと呼ぶ。

フィルトレーションの定義においては時間の概念は必要ない。実際に時間の概念のない確率モデルに対して上手にフィルトレーション、マルチンゲールを導入して解析を行っている例は非常に多い。

一方で $n = 0, 1, 2, \dots$ とするので、これを時間と思うのが自然になる。また、元々時間が入っている確率過程において時刻 n までの状態で表される事象全体 $\sigma(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n)$ を $\mathcal{F}_n$ として考えると、自然なフィルトレーションになりここからマルチンゲールを導入することは自然である。

マルチンゲール

定義 マルチンゲール

確率過程 (X_n) がフィルトレーション $(\mathcal{F}_n)$ に対してマルチンゲールであるとは以下の3条件を満たすことである。

- (1) 任意の $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して X_n は $\mathcal{F}_n$ 可測である。
- (2) 任意の $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して X_n は $E[|X_n|] < \infty$ である。
- (3) 任意の $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して X_n は次を満たす

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n, \quad \text{a.s.}$$

同様に劣マルチンゲールとは (3) の等式を次に変えたもの

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n, \quad \text{a.s.}$$

優マルチンゲールとは (3) の等式を次に変えたものである。

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n, \quad \text{a.s.}$$

マルチンゲール

マルチンゲールの語源は（意識すると）「公平な賭け」である。毎時刻に期待値が 0 の賭けを行っていて、その n 回目の得られる金額を表す確率変数を Z_n , X_n を時刻 n での所持金額とすると自然に

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n Z_k$$

と書けるが、これは（自然な仮定の下、自然なフィルトレーションに対して）マルチンゲールになる。

マルチンゲール

問題

上で挙げた例のように、毎時刻に期待値が 0 の賭けを行っていて、その n 回目の得られる金額を表す確率変数を Z_n (全ての n に対して $E[Z_n] = 0$), X_n を時刻 n での所持金額とすると自然に

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n Z_k$$

と書けるが、全ての n に対して $E[|Z_n|] < \infty$ を仮定する。また $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n)$ とする。このとき当然 X_n は $\mathcal{F}_n$ 可測になるがこれに加えて $n < m$ であれば Z_m と $\mathcal{F}_n$ は独立であることを仮定する。

このとき X_n がマルチンゲールであることを示せ。すなわち、この (X_n) がマルチンゲールの定義を満たしていることを、この問題中の仮定と、定理として与えた条件付期待値の性質だけを用いて示せ。

問題 続く

上で挙げた問題の発展版、
毎時刻に期待値が 0 の賭けを行っている。その n 回目の賭けで、
1 単位分の賭けを行ったときに得られる金額を表す確率変数を Z_n
(全ての n に対して $E[Z_n] = 0$), とする。この n 回目の賭けに対
して何らかの戦略を立てて、 S_{n-1} 単位賭けることにするが、この
戦略 S_{n-1} はそれまでの得られた金額 (実際には、全ての Z_k
 $k = 1, 2, \dots, n-1$ の値) を使っても良いこととする。
上の問題と同様に X_n を時刻 n での所持金額とすると自然に

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n S_{k-1} Z_k$$

と書けるが、全ての n に対して $E[|S_{n-1} Z_n|] < \infty$ を仮定する。

マルチンゲール

問題 続き

また $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ とする。このとき当然 X_n は $\mathcal{F}_n$ 可測になるがこれに加えて $n < m$ であれば Z_m と $\mathcal{F}_n$ は独立であることを仮定する。

このとき X_n がマルチンゲールであることを示せ。

マルチンゲール

この問題は経済学的な問題から出発している。

株価（に相当するものが）マルチンゲールであることを仮定して、時刻 n と $n-1$ での株価の差を Z_n とおいて S_{n-1} の戦略はどのくらいの量の株を売買するかを表しているものと思う。

このとき良い戦略を立てることができれば、所持金額 X_n はどんどん増えていく（少なくとも劣マルチンゲール）になりそうな感じがするが、この問題の結果はマルチンゲール（公平な賭け）をベースに過去の情報だけを使って戦略を立てて賭けをしている限りにおいてはやはりマルチンゲール（公平な賭け）にしかならないことを示している。

すなわち、現実問題として株価を使って儲けているように思えるということは、実際の株価はマルチンゲールではないということを示唆している。

実際には株価はその企業の成長により増加していき、劣マルチンゲールになっていると考えるのが自然である。

マルチンゲール

補題

(1) (X_n) はマルチンゲールとする。 ϕ は下に凸な関数で、任意の n に対して $E[|\phi(X_n)|] < \infty$ とする。このとき $(\phi(X_n))$ は劣マルチンゲールである。

(2) (X_n) は劣マルチンゲールとする。 ϕ は下に凸な関数で、単調増加、任意の n に対して $E[|\phi(X_n)|] < \infty$ とする。このとき $(\phi(X_n))$ は劣マルチンゲールである。

$p > 1$ として $\phi(x) = |x|^p$ は下に凸な関数になるので、この補題を $|X_n|^p$ 特に X_n^2 で取り扱うことは非常に多い。

マルチンゲール

証明

(1) のみ証明する。

補題の仮定から劣マルチンゲールの条件の (1)(2) は明らかである。 (X_n) がマルチンゲールであれば $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ a.s. であることに注意して、これと条件付期待値の定理 (6) より

$$\phi(X_n) = \phi(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \leq E[\phi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n], \text{ a.s.}$$

より $(\phi(X_n))$ は劣マルチンゲールになる。

問題

補題の (2) でなぜ単調増加が必要であるか述べよ。
(2) の証明を行うと共に、反例を挙げよ。

マルチンゲール

定理 Doob 分解

劣マルチンゲール (X_n) は次のようにマルチンゲールと増加部分に分解できる。

(1) $X_n = M_n + A_n$, a.s.

(2) (M_n) はマルチンゲール

(3) (A_n) は $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測で $0 = A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \dots$ a.s.

さらにこのような分解は一意的である。すなわち

$X_n = M_n + A_n = M'_n + A'_n$ a.s. と 2 通りの分解ができたとすると $M_n = M'_n$, $A_n = A'_n$ a.s. である。

マルチンゲール

証明

(M_n) を次のように定義する。

$$M_n = \begin{cases} X_0 & \text{if } n = 0 \\ X_0 + \sum_{k=1}^n \{X_k - E[X_k | \mathcal{F}_{k-1}]\} & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

$M_{n+1} - M_n = X_{n+1} - E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ と書けることに注意する。
このとき明らかに M_n は $\mathcal{F}_n$ 可測かつ可積分であり

$$E[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] = E[X_{n+1} - E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] | \mathcal{F}_n] = 0, \quad \text{a.s.}$$

すなわち $E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n$ でありマルチンゲールである。

マルチンゲール

この (M_n) を使って (A_n) を次のように定義する。

$$A_n = X_n - M_n$$

このとき明らかに $A_0 = 0$ であり、

$$A_n = X_n - (X_n - E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] + M_{n-1}) = E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - M_{n-1}$$

と書けるので A_n は $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測。

A_{n+1} には今の変形を、 A_n には定義を代入することで

$$A_{n+1} - A_n = (E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - M_n) - (X_n - M_n) = E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n$$

さらに X_n は劣マルチンゲールだから $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n \geq 0$ に注意すると $A_{n+1} - A_n \geq 0$ より増加過程になる。

すなわち (1)(2)(3) を満たすような分解が得られた。

マルチンゲール

全ての n に対して $X_n = M_n + A_n = M'_n + A'_n$ a.s. と 2通りの分解ができたとすると $A_n - A'_n = M'_n - M_n$ a.s. と書き換えられるが A_n, A'_n は $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測であったので

$$A_n - A'_n = E[A_n - A'_n | \mathcal{F}_{n-1}] = E[M'_n - M_n | \mathcal{F}_{n-1}], \text{ a.s.}$$

であるがさらに M_n, M'_n がマルチンゲールであることを使えば $A_n - A'_n = M'_{n-1} - M_{n-1}$ a.s. でありさらに $A_n - A'_n = M'_n - M_n$ a.s. をパラメータを $n-1$ として適用すれば

$$A_n - A'_n = A_{n-1} - A'_{n-1}$$

を得られるが、帰納的に適用することで

$$A_n - A'_n = A_{n-1} - A'_{n-1} = \cdots = A_1 - A'_1 = A_0 - A'_0 = 0, \text{ a.s.}$$

すなわち全ての n で $A_n = A'_n$ a.s. であり再度 $A_n - A'_n = M'_n - M_n$ a.s. を適用すると全ての n で $M_n = M'_n$ a.s. でもある。 □

マルチンゲール

定義 停止時刻

(非負整数値) 確率変数 τ が停止時刻、またはマルコフ時刻であるとは任意の $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して以下を満たすことである。

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

補題

τ が停止時刻であることと、以下は同値である。
任意の $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して以下を満たす。

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$$

マルチンゲール

証明

集合を次のように書き直せば、フィルトレーション $\mathcal{F}_n$ の定義から明らかである。

$$\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}$$

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{\tau = k\}$$



停止時刻は確率過程、特に賭けを考えるのが自然である。
何か（公平な）賭けをしている時に、どうしても途中で賭けをやめて清算しなければいけなくなった時にどのように清算すべきかという問題から始まったが、これを少し悪用して、どのような条件で賭けを中止すれば儲けられるかというような話にすり替わった。このとき自然に賭けを中止（停止）させられる（確率的な）時間（戦略）の条件の中で一番条件の少ないものは、「現在までの情報は全て使ってもよい」となるが、これを数学的に書くとこの停止時刻になる。

補題

τ, σ が停止時刻であるとき

$$\tau \vee \sigma = \max\{\tau, \sigma\}, \quad \tau \wedge \sigma = \min\{\tau, \sigma\}, \quad \tau + \sigma$$

も停止時刻である。

証明

それぞれを次のように書き直せば、フィルトレーション $\mathcal{F}_n$ の定義から明らかである。

$$\{\tau \vee \sigma \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cap \{\sigma \leq n\}$$

$$\{\tau \wedge \sigma \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cup \{\sigma \leq n\}$$

$$\{\tau + \sigma \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{\tau = k\} \cup \{\sigma \leq n - k\}$$



定義 停止時刻によるフィルトレーション

τ を停止時刻とする。このとき $\mathcal{F}_\tau$ を次のように定義する。

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}; \text{ 任意の } n \text{ に対して } A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

この停止時刻によるフィルトレーションは、停止時刻 τ までの情報を考えていると思える。

次の事実はこの授業では主張を述べるだけにする。

補題

τ, σ を停止時刻とする。このとき以下が成立する。

- (1) $\mathcal{F}_\tau$ は σ -加法族である。
- (2) τ は $\mathcal{F}_\tau$ 可測である。
- (3) $\tau \leq \sigma$ であれば $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$ である。

マルチンゲール

定理 任意抽出定理

(X_n) を劣マルチンゲール、 τ, σ を停止時刻とし、ある定数 K が存在して $\tau \leq \sigma \leq K$ a.s. とする。このとき X_τ, X_σ は共に可積分で

$$E[X_\sigma | \mathcal{F}_\tau] \geq X_\tau, \quad \text{a.s.}$$

である。 (X_n) をマルチンゲールにすると

$$E[X_\sigma | \mathcal{F}_\tau] = X_\tau, \quad \text{a.s.}$$

である。

停止時刻に関する仮定は有名なものがいくつかあるが、一番分かりやすい（取り扱いやすい）有界なものとした。

$\sigma < \infty$ a.s. だけでは不十分で、この場合マルチンゲール (X_n) に仮定を付けることが必要になる。

マルチンゲール

証明

可積分性は $\tau \leq K$ であることから

$$E[|X_\tau|] = \sum_{k=0}^K E[|X_k|, \{\tau = k\}] \leq \sum_{k=0}^K E[|X_k|] < \infty$$

が分かる。 X_σ も同様。

マルチンゲール

(X_n) がマルチンゲールであるときに

$$E[X_\sigma | \mathcal{F}_\tau] = X_\tau, \quad \text{a.s.}$$

を示すが、条件付期待値の定義に戻って任意の $A \in \mathcal{F}_\tau$ のときに

$$E[X_\sigma, A] = E[X_\tau, A]$$

を示す。

左辺は

$$E[X_\sigma, A] = \sum_{k=0}^K E[X_k, A \cap \{\sigma = k\}]$$

と書けるが $\tau \leq \sigma$ を仮定しているので、補題より $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$ になり、 $A \cap \{\sigma = k\} \in \mathcal{F}_k$ になる。

マルチンゲール

(X_n) がマルチンゲールであるので $B \in \mathcal{F}_k$ に対して

$$E[X_k, B] = E[E[X_K | \mathcal{F}_k], B] = E[E[X_K, B | \mathcal{F}_k]] = E[X_K, B]$$

より $B = A \cap \{\sigma = k\}$ として

$$E[X_\sigma, A] = \sum_{k=0}^K E[X_k, B] = \sum_{k=0}^K E[X_K, B] = E[X_K, A]$$

と書ける。全く同様に

$$E[X_\tau, A] = \sum_{k=0}^K E[X_K, B] = E[X_K, A]$$

とも書ける。

マルチンゲール

(X_n) が劣マルチンゲールであるとき定理 Doob 分解を用いて $X_n = M_n + A_n$ とマルチンゲール (M_n) と増加部分 (A_n) に分解する。

$\tau \leq \sigma$ であるので $A_\tau \leq A_\sigma$ になるため

$$A_\tau = E[A_\tau | \mathcal{F}_\tau] \leq E[A_\sigma | \mathcal{F}_\tau], \quad \text{a.s.}$$

となる。これとマルチンゲールの場合の結果を合わせることにより

$$X_\tau = M_\tau + A_\tau \leq E[M_\sigma + A_\sigma | \mathcal{F}_\tau] = E[X_\sigma | \mathcal{F}_\tau], \quad \text{a.s.}$$

と書ける。



マルチンゲール

停止時刻の導入のところで、賭けを中止するときどのように清算すべきかという問題設定を行ったが、この定理は、マルチンゲール（公平な賭け）であれば、停止時刻で中止をする限りにおいては、その時点での所持金額をそのままもらうことを持って清算とすればよいと言っている。

マルチンゲール

$x^+ := \max\{x, 0\}$ 特に確率変数に適用して X^+ は X の正部分を表すものとする。

定理 Doob の不等式

(X_n) を劣マルチンゲールとする。このとき任意の $a > 0$ に対して以下が成立する

$$\begin{aligned} P\left(\max_{0 \leq k \leq K} X_k \geq a\right) &\leq \frac{1}{a} E[X_K, \{\max_{0 \leq k \leq K} X_k \geq a\}] \leq \frac{1}{a} E[X_K^+] \\ P\left(\min_{0 \leq k \leq K} X_k \leq -a\right) &\leq \frac{1}{a} E[X_K - X_0] - \frac{1}{a} E[X_K, \{\min_{0 \leq k \leq K} X_k \leq -a\}] \\ &\leq \frac{1}{a} E[X_K^+] - \frac{1}{a} E[X_0] \end{aligned}$$

証明

停止時刻として $\sigma = \min\{k; X_k \geq a\}$ すなわち、初めて a 以上になった時間を導入すると $\{\max_{0 \leq k \leq K} X_k \geq a\} = \{\sigma \leq K\}$ すなわち時刻 K までの最大値が a より大きいことと、 a 以上になった時間が K 以下であることは同じである。

$\sigma < K$ を仮定すると $X_\sigma \geq a$ に注意すれば、

$$P(\max_{0 \leq k \leq K} X_k \geq a) = P(\sigma \leq K) \leq E[\frac{1}{a} X_\sigma, \{\sigma \leq K\}]$$

と書ける。これをさらに計算して

$$E[X_\sigma, \{\sigma \leq K\}] = \sum_{k=0}^K E[X_\sigma, \{\sigma = k\}] = \sum_{k=0}^K E[X_k, \{\sigma = k\}]$$

マルチンゲール

ここで (X_n) が劣マルチンゲールであったので

$$E[X_k, \{\sigma = k\}] = E[E[X_k | \mathcal{F}_k], \{\sigma = k\}] \leq E[E[X_K | \mathcal{F}_k], \{\sigma = k\}]$$

であることを使えば

$$E[X_\sigma, \{\sigma \leq K\}] \leq E[X_K, \{\sigma \leq K\}] = E[X_K, \{\max_{0 \leq k \leq K} X_k \geq a\}]$$

すなわち

$$P(\max_{0 \leq k \leq K} X_k \geq a) \leq \frac{1}{a} E[X_K, \{\max_{0 \leq k \leq K} X_k \geq a\}]$$

が示せた。

マルチンゲール

X^+ の定義から $X \leq X^+$ かつ $X^+ \geq 0$ に注意すると

$$E[X_K, \{\sigma \leq K\}] \leq E[X_K^+, \{\sigma \leq K\}] \leq E[X_K^+]$$

より

$$\frac{1}{a} E[X_K, \{\max_{0 \leq k \leq K} X_k \geq a\}] \leq \frac{1}{a} E[X_K^+]$$

が示される。

マルチンゲール

先ほどと同様に停止時刻 $\tau = \min\{k; X_k \leq -a\}$ を導入すると、定数も停止時刻であることに注意して、定数 0 と $\tau \wedge K$ も停止時刻になり $0 \leq \tau \wedge K \leq K$ と、劣マルチンゲール (X_n) に対して、任意抽出定理を適用することで

$$E[X_0] \leq E[E[X_{\tau \wedge K} | \mathcal{F}_0]] = E[X_{\tau \wedge K}]$$

これを

$$E[X_{\tau \wedge K}] = E[X_{\tau \wedge K}, \{\tau \leq K\}] + E[X_{\tau \wedge K}, \{\tau > K\}]$$

と分解する。この時 $\tau \leq K$ であれば $X_{\tau \wedge K} \leq -a$ 、 $\tau > K$ であれば $\tau \wedge K = K$ に注意すれば

$$\begin{aligned} & E[X_{\tau \wedge K}, \{\tau \leq K\}] + E[X_{\tau \wedge K}, \{\tau > K\}] \\ & \leq -aP(\tau \leq K) + E[X_K, \{\tau > K\}] \end{aligned}$$

と書ける。

マルチンゲール

$\{\tau > K\}$ の余事象が $\{\tau \leq K\} = \{\min_{0 \leq k \leq K} X_k \leq -a\}$ に注意すれば

$$E[X_K, \{\tau > K\}] = E[X_K] - E[X_K, \{\min_{0 \leq k \leq K} X_k \leq -a\}]$$

これらをまとめると

$$E[X_0] \leq -aP(\{\min_{0 \leq k \leq K} X_k \leq -a\}) + E[X_K] - E[X_K, \{\min_{0 \leq k \leq K} X_k \leq -a\}]$$

と書けるが、移項して書き直すことにより

$$P(\{\min_{0 \leq k \leq K} X_k \leq -a\}) \leq \frac{1}{a}E[X_K - X_0] - \frac{1}{a}E[X_K, \{\min_{0 \leq k \leq K} X_k \leq -a\}]$$

を示せた。

マルチンゲール

この式を $\{\min_{0 \leq k \leq K} X_k \leq -a\}$ の余事象が $\{\min_{0 \leq k \leq K} X_k > -a\}$ であることを使って書き直せば

$$P(\{\min_{0 \leq k \leq K} X_k \leq -a\}) \leq \frac{1}{a} E[X_K, \{\min_{0 \leq k \leq K} X_k > -a\}] - \frac{1}{a} E[X_0]$$

と書けるが

$$E[X_K, \{\min_{0 \leq k \leq K} X_k > -a\}] \leq E[X_K^+, \{\min_{0 \leq k \leq K} X_k > -a\}] \leq E[X_K^+]$$

より

$$P(\{\min_{0 \leq k \leq K} X_k \leq -a\}) \leq \frac{1}{a} E[X_K^+] - \frac{1}{a} E[X_0]$$

を得る。



マルチンゲール

系

$p \geq 1$ に対して、 (M_n) を p 乗可積分マルチンゲールとする。このとき任意の $a > 0$ に対して以下が成立する

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq K} |M_k| \geq a\right) \leq \frac{1}{a^p} E[|M_K|^p]$$

この系は特に $p = 2$ の時によく使われる。

問題

この系を証明せよ。すなわち、どのように劣マルチンゲールを設定すればよいかを示せ。

マルチンゲール

この系をマルチンゲールの p 次モーメントに関する評価に書き直す。元の定理や、系よりもこちらの方がよく使われ、この場合も $p = 2$ の場合がよく使われる。

定理 Doob の不等式

(M_n) を $p > 1$ 乗可積分マルチンゲールとする。このとき以下が成立する

$$E\left[\max_{0 \leq k \leq K} |M_k|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|M_K|^p]$$

マルチンゲール

証明

$q > 0$. $y > 0$ とすると次が成り立つ。

$$y^q = \int_0^y qz^{q-1} dz = \int_0^\infty qz^{q-1} 1_{\{y \geq z\}} dz$$

記号を簡単にするために $Y = \max_{0 \leq k \leq K} |M_k|$ として、上の等式を $y = Y$ として使用すれば

$$E[Y^p] = E\left[\int_0^\infty pz^{p-1} 1_{\{Y \geq z\}} dz\right]$$

と書ける。

マルチンゲール

積分と、期待値の順序交換を行って $E[1_{\{Y \geq z\}}] = P(Y \geq z)$ であることに注意して、さらに劣マルチンゲール $|M_k|$ に対して、先の Doob の不等式の一つ目を適用すれば

$$\begin{aligned} E[Y^p] &= \int_0^\infty pz^{p-1}P(Y \geq z)dz \\ &\leq \int_0^\infty pz^{p-1}\frac{1}{z}E[|M_K|, \{Y \geq z\}]dz \end{aligned}$$

再度積分と期待値の順序交換を行うと、

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty pz^{p-1}\frac{1}{z}E[|M_K|, \{Y \geq z\}]dz \\ &= E[|M_K| \int_0^\infty pz^{p-2}, 1_{\{Y \geq z\}} dz] \end{aligned}$$

マルチンゲール

さらに y^{p-1} と積分の関係をもう一度使い、 $1/p + (p-1)/p = 1$ としてヘルダーの不等式を用いれば

$$\begin{aligned} & E[|M_K| \int_0^\infty pz^{p-2}, 1_{\{Y \geq z\}} dz] \\ &= \frac{p}{p-1} E[|M_K| Y^{p-1}] \\ &\leq \frac{p}{p-1} E[|M_K|^p]^{1/p} E[(Y^{p-1})^{p/(p-1)}]^{(p-1)/p} \end{aligned}$$

すなわち

$$E[Y^p] \leq \frac{p}{p-1} E[|M_K|^p]^{1/p} E[Y^p]^{(p-1)/p}$$

であるが、両辺 p 乗したのち、 $E[Y^p]$ でまとめると定理の主張を得る。 □

マルチンゲール

定義 2 次変分

2 乗可積分マルチンゲール (M_k) に対して 2 次変分を次で定義する

$$[M]_k = \sum_{j=1}^k (M_j - M_{j-1})^2$$

ブラウン運動もしくは、ブラウン運動を用いた確率積分や確率微分方程式で表れる 2 次変分は $\langle M \rangle_t$ を用いるが、連続時間の連続マルチンゲールでは同じものになる。ジャンプのあるマルチンゲールでは別のものになるため記号を別のものにすることが多い。

マルチンゲール

命題 2 次変分

2 次変分 $[M]_k$ は以下を満たす。

- (1) $([M]_k)$ は増加過程
- (2) $(M_k^2 - [M]_k)_K$ はマルチンゲール

証明

(1) は 2 次変分の定義から明らかである。

(2) 可測性と可積分性は明らかなので

$E[M_{k+1}^2 - [M]_{k+1} | \mathcal{F}_k] = M_k^2 - [M]_k$ を見る。

2 次変分の定義から次のように書ける

$$\begin{aligned} & (M_{k+1}^2 - [M]_{k+1}) - (M_k^2 - [M]_k) \\ &= (M_{k+1}^2 - M_k^2) - (M_{k+1} - M_k)^2 \\ &= 2M_k(M_{k+1} - M_k) \end{aligned}$$

マルチンゲール

条件付き期待値の性質と合わせることで

$$\begin{aligned} & E[M_{k+1}^2 - [M]_{k+1} | \mathcal{F}_k] - (M_k^2 - [M]_k) \\ &= E[M_{k+1}^2 - [M]_{k+1} - (M_k^2 - [M]_k) | \mathcal{F}_k] \\ &= E[2M_k(M_{k+1} - M_k) | \mathcal{F}_k] \\ &= 2M_k(E[M_{k+1} | \mathcal{F}_k] - M_k) \end{aligned}$$

と書き直せるが M_k はマルチンゲールであるので右辺は 0 になる。



マルチンゲール

次の事実はこの授業では主張を述べるだけにする。

定理 バークホルダーの不等式

任意の $p \geq 1$ に対して定数 c_p, C_p が存在して $M_0 = 0$ を満たす全ての p 乗可積分マルチンゲールに対して

$$c_p E[[M]_K^{p/2}] \leq E[\max_{0 \leq k \leq K} |M_k|^p] \leq C_p E[[M]_K^{p/2}]$$

が成立する。

応用上、多くの場合2つ目の不等式を使う。また $p = 2$ の場合が多いが、この場合に限れば命題2次変分の主張から明らかである。この時に $E[M_K^2]$ 自体を評価するのは難しそうだが、2次変分が明示的に書けたり、問題の性質上 $(M_{k+1} - M_k)^2$ に関する（オーダー）評価がしやすいことはよく起こる。このため基本的な評価方法としてよく用いられる。

マルチンゲール

このスライドの最初に書いたように条件付確率が割り算で定義できる場合、すなわち

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

とすると自然にこの条件付確率での期待値として条件付期待値が定義できるが、これは $P(B) = 0$ の時にも対応できるように定義した条件付期待値の性質を持っている。

特に状態空間が有限で、離散時間の Markov 連鎖のモデルでは、条件付確率が割り算で定義できる。このような場合、この割り算で定義した条件付確率を使って、直感的な計算で、マルチンゲールになるかならないかを判定することができる。

マルチンゲール

設定として状態空間 S は有限集合で、時間的一様な Markov 連鎖 (X_n) の推移確率行列

$$P_{x,y} := P(X_1 = y | X_0 = x), \quad x, y \in S$$

が与えられているものとしフィルトレーションは

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ と取る。すなわち、時刻 n まで Markov 連鎖がどのように動いてきたかの情報で、フィルトレーションを作っている。

$f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$Y_n = f_n(X_n)$$

とすると、新たな確率過程 (Y_n) が定義できるが、この (Y_n) が $\mathcal{F}_n$ -マルチンゲールになるかならないかを判定する。なお $\mathcal{G}_n = \sigma(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ とすると $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$ であり、 $\mathcal{F}_n$ -マルチンゲールになれば $\mathcal{G}_n$ -マルチンゲールにもなるが、逆は必ずしも成り立たない。また、この (Y_n) は必ずしも Markov 連鎖にならないことに注意する。

問題

$B_1, B_2, \dots, B_K$ は $B_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$) とし $\bigcup_{i=1}^K B_i = B$ とする。
ことのき割り算で定義した条件付確率は任意の A に対して

$$P(A|B) = \sum_{i=1}^K P(A|B_i)P(B_i|B)$$

を示せ。

マルチンゲール

定理 マルチンゲールの判定

全ての $x \in S$ 全ての $n \geq 0$ に対して Y_n は可積分で

$$E[Y_{n+1} | \{X_n = x\}] = f_n(x)$$

であれば Y_n は $\mathcal{F}_n$ -マルチンゲールである。

マルチンゲール

証明

仮定から、可測性と、可積分性は満たしている。このため任意の $B \in \mathcal{F}_n$ に対して $E[Y_n, B] = E[Y_{n+1}, B]$ を言えば十分である。
 $B \in \mathcal{F}_n$ とすると $\mathcal{F}_n$ の定義から

$$B = \cup \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}$$

のような有限個の排反な集合の和集合の形に書けていることに注意すると、

$$\begin{aligned} E[Y_n, B] &= E[Y_n, \cup \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}] \\ &= \sum E[Y_n, \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}] \\ &= \sum E[f_n(x_n) \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}] \\ &= \sum f_n(x_n) P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \end{aligned}$$

と書け

マルチンゲール

同様に

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}, B] &= E[Y_{n+1}, \cup\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}] \\ &= \sum E[Y_{n+1}, \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}] \\ &= \sum E[Y_{n+1} | \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}] \\ &\quad \times P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \end{aligned}$$

と書けるが、 $Y_{n+1} = f_{n+1}(X_{n+1})$ であつ (X_n) が Markov 連鎖であつたので

$$E[Y_{n+1} | \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}] = E[Y_{n+1} | \{X_n = x_n\}]$$

と書ける。これに仮定の条件を使えば

$E[Y_{n+1} | \{X_n = x_n\}] = f_{n+1}(x_n)$ と書き直せるため

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}, B] &= E[Y_{n+1}, \cup\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}] \\ &= \sum f_n(x_n) P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \end{aligned}$$

より $E[Y_n, B] = E[Y_{n+1}, B]$ である。



マルチンゲール

第1回目のスライドで出した連続時間 Markov 連鎖から作られるマルチンゲールを一般的な設定で書くと次のようになる。

命題 Markov 連鎖から作られるマルチンゲール

状態空間 S に対して連続時間 Markov 連鎖 (X_t) の生成作用素を L とする。 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t Lf(X_s)ds + M_t$$

となるように M_t を定める。すなわち

$$M_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds$$

である。この時 M_t はマルチンゲールになる。

マルチンゲール

この授業では、この命題の証明は行わないことにするが、この命題の離散時間版を取り上げ、その証明を行う。

離散時間版を考えるので、時間積分が時間に関する和になり、第2回目のスライドから生成作用素 L は推移確率行列 P が与えられている時には次のように定義していた。

状態空間 S 上の時間的に一様な離散時間 Markov 連鎖の推移確率行列 P が与えられている時、 $Q = P - I$ としてが、対応する生成作用素 L は $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$Lf(x) = \sum_{y \in S, y \neq x} Q_{x,y} \{f(y) - f(x)\}$$

と定義する。

このとき命題の離散時間版は次のようになる。

マルチンゲール

定理 Markov 連鎖から作られるマルチンゲール

状態空間 S に対して離散時間 Markov 連鎖 (X_t) の推移確率を P とし、対応する生成作用素を L とする。 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{s=0}^{t-1} Lf(X_s) + M_t$$

となるように M_t を定める。すなわち

$$M_t = f(X_t) - f(X_0) - \sum_{s=0}^{t-1} Lf(X_s)$$

である。この時 M_t はマルチンゲールになる。

マルチンゲール

証明

定理 マルチンゲールの判定を使えば、全ての $x \in S$, $t \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} E[f(X_{t+1}) - f(X_0) - \sum_{s=0}^t Lf(X_s) | \{X_t = x\}] \\ = f(X_t) - f(X_0) - \sum_{s=0}^{t-1} Lf(X_s) \end{aligned}$$

を示せばよいが移項して計算すれば、全ての $x \in S$, $t \geq 0$ に対して

$$E[\{f(X_{t+1}) - f(X_t)\} | \{X_t = x\}] = E[Lf(X_t) | \{X_t = x\}]$$

を示せばよい。

マルチンゲール

左辺は（割り算で定義した）条件付確率の定義と、推移確率行列の定義から $P(X_{t+1} = y | \{X_t = x\}) = P_{x,y}$ に注意すると

$$E[\{f(X_{t+1}) - f(X_t) | \{X_t = x\}\}] = \sum_{y \in S} P_{x,y} f(y) - f(x)$$

となるが、 $\sum_{y \in S} P_{x,y} = 1$ であることと、 $\{f(x) - f(x)\} = 0$ であることに注意すれば

$$E[\{f(X_{t+1}) - f(X_t) | \{X_t = x\}\}] = \sum_{y \in S, y \neq x} P_{x,y} \{f(y) - f(x)\}$$

一方右辺は Lf , Q の定義から

$$\begin{aligned} E[Lf(X_t) | \{X_t = x\}] &= Lf(x) \\ &= \sum_{y \in S, y \neq x} Q_{x,y} \{f(y) - f(x)\} = \sum_{y \in S, y \neq x} P_{x,y} \{f(y) - f(x)\} \end{aligned}$$

