

確率的感染症モデル 第1回

永幡幸生
新潟大学

nagahata@eng.niigata-u.ac.jp

2022 前期

確率的感染症モデル

この講義では、確率的感染症モデル (SIR モデル) を中心にして、確率論の基本的な事柄を紹介する。

自然現象を中心に、何か特徴的な現象が起きている場合には、数理モデルを通してその現象を理解できることが多くある。考えたい現象に対応するような数理モデルを与えることができれば、そのモデルを通して未来を予想できることが期待される。

確率を含むような数理モデルを与えた場合、その取り扱いは分かりにくいかもしれないが、一方で確率論の基礎的な事柄を知っていれば、意外と多くの情報を得ることができる。

この授業で取り扱う基本的な事柄として、連続時間 Markov 連鎖、マルチンゲール、Markov 連鎖におけるマルチンゲール、スケール極限を取り上げる。

確率的感染症モデル

SIR モデル

SIR モデルは感染症の分野で基本的に使われる数理モデルであるが、（何も言わなければ）常微分方程式系のモデルである。同じ言葉を使う確率過程モデルがあるが、常微分方程式モデルは確率過程の中でも Markov 連鎖のモデルの対応する物理量の期待値（の近似値）を与えるモデルと考えられる。

SIR モデルの名前の由来は Susceptible 感受性保持者（まだ感染していない者）Infected 感染者 Recovered 免疫保持者（感染して復帰した者）の頭文字である。

コロナウイルスのケースでは SIR モデルを取り扱うよりも SEIR モデルとして、Exposed（感染して）潜伏期の者を加えたモデルの方が実態とあっていると思われるが、定性的な性質を持つ限りにおいては大差がないので、より取り扱いやすい Markov 型 SIR モデル、を取りあげる。

確率的感染症モデル

このモデルは、これらの3種類の人数の時間発展を表すモデルである。基本的には時刻0ではほぼ全ての者はSの状態、極少数のIの状態の者がいることを想定する。このIの状態の者がSの状態の者と接触して、非感染者Sを感染者Iに変化させる。またIの状態の者は感染から復帰してRの状態に変化する。一度Rになった場合は再度感染することは考えない。(Rの人間が再度Sに戻った後に、再感染するモデルも考えられるが、それはSIRSモデルと呼ばれる。)

確率的感染症モデル

Markov 連鎖のモデルは連続時間 Markov 連鎖で、 S, I, R を対応する状態の者の数を表すものとしてこの3つの物理量を並べたベクトル (S, I, R) を見る。このため状態空間を

$$\mathbf{S} = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{Z}, x, y, z \geq 0, x + y + z = N\}$$

ととる。ここで $N \in \mathbb{Z}$ はパラメータで総人口に対応する量である。対応する作用素は2つのパラメータ $\beta, \gamma > 0$ を用いて

$$\begin{aligned} Lf((x, y, z)) = & \beta xy \{f((x-1, y+1, z)) - f((x, y, z))\} \\ & + \gamma y \{f((x, y-1, z+1)) - f((x, y, z))\} \end{aligned}$$

と取る。

確率的感染症モデル

この作用素の表すモデルにおいては、瞬間的に（理想的に）見れば、非感染者が、感染者になる時間や感染者が復帰する時間は分離でき、一つ一つの遷移は別の時間になることを仮定している。

1 行目が非感染者が感染者になることに対応しているが、その比率はその時間における感染者数と非感染者数のそれぞれに比例している。これは（直接的、間接的はおいておくとして）感染者と非感染者が接触することにより感染するという自然な仮定からきており、接触機会が感染者数と非感染者数のそれぞれに比例していることに対応している。

2 行目が感染者が復帰することに対応するが、その比率はその時間における感染者数に比例している。これも各々の感染者が治癒して復帰していくため感染者数に比例しているのは自然な仮定である。

確率的感染症モデル

一般的に状態 $(x, y, z) \in \mathbf{S}$ により与えられる物理量 $u = f((x, y, z))$ が L を生成作用素とするマルコフ連鎖 (X_t, Y_t, Z_t) に沿って時間発展するとき $u_s = f((X_s, Y_s, Z_s))$ は

$$u_t - u_0 = \int_0^t \frac{d}{ds} u_s ds = \int_0^t Lf((X_s, Y_s, Z_s)) ds + M_t$$

と書いたときに M_t がマルチンゲールになり、平均値を取ることで見えなくなる。

平均値を取ること

$$\frac{d}{dt} E[u_t] = E[Lf((X_t, Y_t, Z_t))]$$

と書けるため、 $u = f((x, y, z))$ として3種類 $f_1((x, y, z)) = x$, $f_2((x, y, z)) = y$, $f_3((x, y, z)) = z$ を使うことで

確率的感染症モデル

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}E[X(t)] = -\beta E[X(t)Y(t)] \\ \frac{d}{dt}E[Y(t)] = \beta E[X(t)Y(t)] - \gamma E[Y(t)] \\ \frac{d}{dt}E[Z(t)] = \gamma E[Y(t)] \end{cases}$$

を得るが $E[X(t)] = S(t)$, $E[Y(t)] = I(t)$, $E[Z(t)] = R(t)$ としてまた $X(t)$, $Y(t)$ はほぼ独立であると思って

$$E[X(t)Y(t)] \cong E[X(t)]E[Y(t)] = S(t)I(t)$$

とすることで常微分方程式モデルとしての SIR モデルを得る

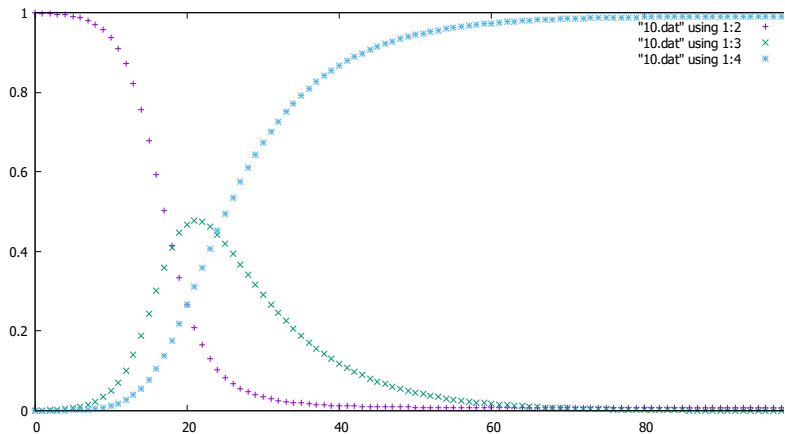
$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) \end{cases}$$

確率的感染症モデル

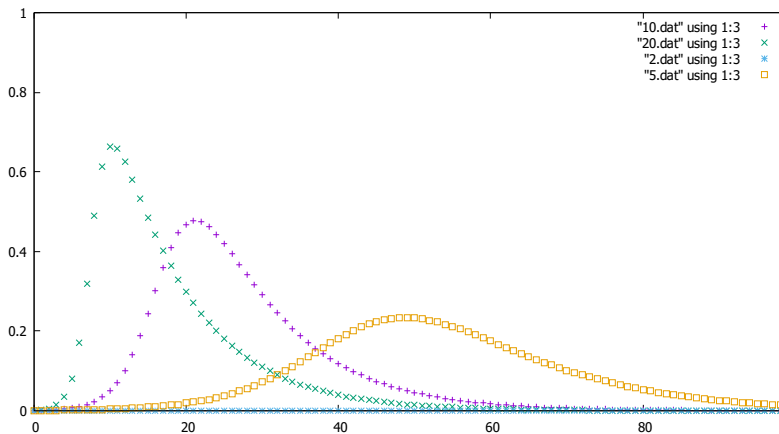
この常微分方程式系は線形ではないので解析的に解くことは難しいが、時間発展として、非感染者数を表す $S(t)$ は単調減少、感染者数を表す $I(t)$ はある時刻まで増加していきその後減少する、復帰した者の数を表す $R(t)$ は単調増加であることが、予想可能である。

また数値的に解くことは容易で、次のページのグラフは $\beta : \gamma = 5 : 1$ と取った時の $S(t), I(t), R(t)$ の相対比率をグラフにしたもの、次々ページは $I(t)$ だけを取り出し、 β を 10, 5, 2.5, 1 と変化させたもの ($\beta = 1$ のケースはほぼ 0 で良く見えていない。)

確率の感染症モデル



確率的感染症モデル



確率的感染症モデル

SIR モデルにおいて、初期条件として $S \gg I + R$ すなわち初めてこの感染症が発見され、ほとんどの人が感染していない（感染したのち復帰した者も含める）状態を考える。この条件の下でさらに時間が 0 に近い間は、作用素の 1 行目 β_{xy} を βN_y と近似してもあまり差がないと思える。

今回のコロナの件のように感染爆発を考えるケースでは、全人口の 0.1% 日本で考えればおおよそ 10 万人感染しないように政策を考える状況であればこの近似を考えることに違和感を感じない。この近似の下では I だけをみても Markov 連鎖になり、その作用素が

$$Lf(y) = \beta N_y \{f(y+1) - f(y)\} + \gamma_y \{f(y-1) - f(y)\}$$

とかけ、 $\beta N_y, \gamma_y$ をパラメータとして持つ出生死滅過程になる。

確率的感染症モデル

現実の感染症モデルに適用するには、感染をコントロールするパラメータ β と治癒をコントロールするパラメータ γ を推定する必要がある。

さらにこの推定結果から何らかの政策を行うために重要な指標として「実行再生産数」という量があるが、これは(定義自体は異なるが、このモデルにおいては、結果的に)

$R_t = \frac{\beta S(t)}{\gamma}$ もしくは感染初期の状況で $S(t) \cong N$ の近似の下で

$R = \frac{\beta N}{\gamma}$ で与えられる。

単純に近似のものを使ったときに微分方程式系の感染者数を表す $I(t)$ の方程式は I だけの閉じた方程式

$$\dot{I}(t) = \beta N I(t) - \gamma I(t)$$

となるが、実行再生産数 R を使って、 β, N を消すと

$$\dot{I}(t) = \gamma(R - 1)I(t)$$

確率的感染症モデル

この方程式

$$\dot{I}(t) = \gamma(R - 1)I(t)$$

は簡単に解くことができ初期値 I_0 に対して

$$I(t) = I_0 \exp\{\gamma(R - 1)t\}$$

と書ける。

$R = 1$ のとき、 $I(t)$ は定数 I_0 を取り続け、 $R < 1$ のとき $I(t)$ は単調減少、 $R > 1$ のとき $I(t)$ は単調増大になる。

このため「実行再生産数を1未満にする」ということが政策で求められる大前提になる。

確率的感染症モデル

2020 年のコロナ関係で「8 割削減」というキーワードが出てきたが、この数は「実行再生産数を 1 未満にする」というための条件として出てきた数である。

当時 (明確には報道されていないと思っているが、会見の言葉から推測して) 実行再生産数の推定値が 2.5 であったと予想される。当時の知見では有効な対応策が分からなかったこともあり、感染症の対策として一番シンプルな「人と人との接触を減らせば、その割合にほぼ比例して感染率が下がり、結果として実行再生産数も減少する」を採用して、全体として「人と人との接触を 6 割削減」することにより、実行再生産数を 1 未満にすることが採用されたと予想される。

確率的感染症モデル

これをみれば「8割削減」は多すぎではないかと思われるが、これは数学の問題ではなく、いろいろ数理モデルになる前に落ちてしまった仮定から来る量で、例えば「人と人との接触を減らす」といっても2週間以上食料の買い足しができないようでは、感染症対策にはなるかもしれないが、体調を崩すのは明らかで、これら接触分を込めて減らさなければいけないので多めの数を提示することは当たり前のことであろう。

確率的感染症モデル

対応策とこのモデルのパラメータの関係は次のようになる。
(緊急事態宣言などの) 人と人との接触を減らす: β を減らす
(現在はまだ無いようであるが) 特效薬を使う: γ を増やす
ワクチン: モデル自体を変化させ、 S から直接 R になる項を増やす。1つの例として

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) - \delta S(t) \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) + \delta S(t) \end{cases}$$

のような微分方程式モデルに変更する。