

基礎数理 A I 期末レポート

問1 以下の極限が存在すればその極限値を求めよ。(なければ存在しないと解答せよ.)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n^3 - n^2 + 3n} - (n^2 + n + 1)}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+3} \right)^{4n+6},$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2x^2 - \sin x}{1 - 2 \cos^2 x}, \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{(2+x+2x^2) \arcsin x}, \quad (6) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-|x|}{|1+x|}$$

問2 以下の関数の微分を求めよ.

$$(1) \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad (2) \log_a(x^2 + \cos x), \quad (3) (x^2 + 1)e^{x^2},$$

$$(4) \frac{5x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}, \quad (5) \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right)^{\cos x}, \quad (6) x \arctan x$$

問3 以下の関数の積分を求めよ. なおこの中には初等関数では書ききれないものも含まれている.(そのような問題は積分できないと書くように)

$$(1) e^{x^2}, \quad (2) e^x \sin x, \quad (3) 2x \arctan x, \quad (4) \log(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$(5) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^4, \quad (6) \frac{4}{1 + \tan x}$$

問4 以下を解答せよ

(1) $f(x) = \log(1+x)$ の n 回導関数を求めよ.

(2) $f(x) = \log(1+x)$ の $x=0$ でのテーラー展開を求めよ.

($f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書いた時の a_n を求めよ.)

(3) $g(x) = \log x$ の $x=1$ でのテーラー展開を求めよ.

(4) (2) の結果を適用して $\log 10$ の近似値を計算せよ (電卓可)

なお (2) の結果は $|x| < 1$ では意味を持つが、 $|x| \geq 1$ では意味を持たない (近似値にならない) ことが知られている。

計算方法は何通りか考えられるが、複数思いついた場合は、その計算方法を与え、そのうち一番良い近似になると考えられるもので計算せよ。(計算方法を複数与えた場合は加点対象。さらになぜ良い近似となるのかの理由がある場合も加点対象。)

問5 以下を解答せよ.

(I) 次の広義積分は収束するか? 収束すればその値を求めよ. (必要ならば α に関して場合分けをせよ.)

$$(1) \int_0^1 x^\alpha dx, \quad (2) \int_1^\infty x^\alpha dx.$$

(II) 次の広義積分は収束するか?

(必要ならば α に関して場合分けをせよ. また収束する場合もその値を求める必要はない.)

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{\sin^\alpha x} dx, \quad (2) \int_1^\infty \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 3x + 2})^\alpha} dx$$

問6 以下を解答せよ.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

に関して

(1) この曲線の長さを求めよ.

(2) この曲線と x, y 軸に囲まれた部分の面積を求めよ.