基礎数理 AI 第 10 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 2 ターム

定積分の基本性質と不定積分・原始関数

ダルブーの S, s を通して定義された定積分の性質を見ることで、最終的に、高校の数 3 と同じものになることを見る。

定積分の基本性質と不定積分・原始関数

定積分の性質

定理 7

(1) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(3) $a < c < b$ として

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(4) $[a, b]$ で $f(x) \geq g(x)$

$\displaystyle\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

(5) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

定積分の基本性質と不定積分・原始関数

定理 8　（積分の平均値定理）

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続

$\Rightarrow a < \exists c < b$ s.t. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

定理 9　（微分積分学の基本定理）

関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で連続

$\Rightarrow a \leq \forall x \leq b,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(y)dy$ は微分可能で $F'(x) = f(x)$

定積分の基本性質と不定積分・原始関数

定義　（不定積分・原始関数）

関数 $f(x)$ に対して

$F(x) = \int_a^x f(x)dx$ を $f(x)$ の不定積分

$G'(x) = f(x)$ を満たす $G(x)$ を原始関数と呼ぶ。

注意

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である。この C を積分定数と呼ぶ。

注意

定理 9 から $f(x)$ が連続ならば不定積分と原始関数はどちらも存在して積分定数を除いて等しいことが分かる。
不定積分における積分定数 C は積分区間にある a の取り方の違いに対応する。

定積分の基本性質と不定積分・原始関数

命題

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

注意

今まで $\int_a^b f(x)dx$ と書いてきたが暗に $a \leq b$ を仮定していた。

$a < b$ に対して

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

と定義すると矛盾がなく、計算が楽にできる。

定積分の基本性質と不定積分・原始関数

注意

定理 9 もしくはその次のスライドの注意により、定積分と、微分の逆演算で定義した数 3 の積分が同じものになった。

注意

微分は頑張れば必ずできたが、積分はできなくてもおかしくない。今までにも挙げてきたように $\int e^{x^2}\,dx$ がその典型例である。

定積分の基本性質と不定積分・原始関数

以下数 3 の復習になるが、置換積分、部分積分とその応用
合成関数の微分により $\left(f(\varphi(x))\right)' = \varphi'(x)f'(\varphi(x))$ だから

定理 4　（置換積分）

$$F(x) = \int f(x)dx \Rightarrow \int \varphi'(x)f(\varphi(x))dx = F(\varphi(x))$$

積の微分により $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ だから
$\displaystyle\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)$ を書き換えて

定理 5　（部分積分）

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

定積分の基本性質と不定積分・原始関数

○ 漸化式：部分積分の応用
次のような例が挙げられる
$I_n = \displaystyle\int \sin^n x dx$ とおくと、部分積分により

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \sin x dx$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

これを I_n に関してまとめると

$$I_n = \frac{1}{n}\{-\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}\}$$

を得るので原理的には全ての I_n が計算できる。

定積分の基本性質と不定積分・原始関数

先のスライドでは原理的に計算できるとしたが、特定の区間における定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ にする。
先のスライドの I_n は x の関数なので $I_n(x)$ と書くと
$(I_n(0) = 0$ として省略する$)$

$$I_n(\frac{\pi}{2}) = \left[\frac{1}{n}\{-\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}(x)\}\right]_0^{\pi/2} = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(\frac{\pi}{2})$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 & n\text{が偶数の時} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}I_1 & n\text{が奇数の時} \end{cases}$$

$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1$ より

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} & n\text{が偶数の時} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3} & n\text{が奇数の時} \end{cases}$$

定積分の基本性質と不定積分・原始関数

問題

ベータ関数 $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ は $p, q > 0$ で定義できるが、$p, q \geq 1$ に対して値を求めよ