

基礎数理 AI 第 8 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 2 ターム

微分の応用と凸関数

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ の求め方の一つ

定理 18,19 (ロピタルの定理)

$$f(a) = g(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

同様に

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

微分の応用と凸関数

○ 例

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

(実際は話が逆転していることに注意)

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

必要ならば何回か適用する。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

微分の応用と凸関数

定義 (凸関数)

$f(x)$ が下に凸

$\Leftrightarrow$

$$a < b < c \Rightarrow f(b) \leq \frac{c-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c)$$

命題 (凸不等式)

$f(x)$ が下に凸

$$\forall n \geq 2, \forall \{x_i\}_{i=1}^n, \forall \{\alpha_i\}_{i=1}^n, \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

微分の応用と凸関数

○ この凸不等式の応用として相加相乗平均の不等式を導く

$f(x) = -\log x$ とすると $f'(x) = -\frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2}$ なので $f(x)$

は下に凸

$\alpha_i = \frac{1}{n}$ ($1 \leq \forall i \leq n$) とすると命題の仮定に適応するので、

($f(x) = -\log x$ の条件として) $x_i > 0$ として

$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ になるが $\log x$ の性質から

$$\text{左辺} = -\log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i = -\frac{1}{n} \log(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= -\log \sqrt[n]{x_1, x_2, \dots, x_n} \end{aligned}$$

これより相加相乗平均の不等式 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{x_1, x_2, \dots, x_n}$

□

微分の応用と凸関数

問題

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)}{\cos x - (1 - \frac{1}{2}x^2)}$$

を計算せよ

問題

$\{x_k\}_{k=1}^n$ $x_k > 0$ ($\forall 1 \leq k \leq n$) とする。 $\alpha \geq 2$ として

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k^\alpha}{n} \geq n^{1-\alpha} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^\alpha$$

を示せ