

基礎数理 AI 第 7 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 2 ターム

微分の応用

現在ではコンピューター上で各種ソフトウェアを使えば、ほとんどの関数のグラフを描画してくれるが、一方で関数から概形を得ることは重要である。

微分の定義から以下が分かる

定理 13

関数 $f(x)$ は $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能とする。

$\Rightarrow$

(1) (a, b) で $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ は $[a, b]$ 上定数関数。

(2) (a, b) で $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ は狭義単調増大。

$(f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ は狭義単調減少)

$\Leftarrow$ は成り立たない。

(3) (a, b) で $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ は単調増大。

$(f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ は単調減少)

定義 (極大、極小)

関数 $f(x)$ が $x = a$ を含む開区間 I で
 $x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$ ならば $x = a$ で極大
($f(x) \leq f(a)$ ならば広義の極大)
 $x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a)$ ならば $x = a$ で極小
($f(x) \geq f(a)$ ならば広義の極小) と呼び
その値を極大値、極小値と呼ぶ。
また極大値、極小値をあわせて極値と呼ぶ。

定理 14

関数 $f(x)$ が $x = a$ で広義の極値を取り微分可能
 $\Rightarrow f'(a) = 0$

定理 15

$f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$ とする

$\Rightarrow$

$f''(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ は $x = a$ で極小

$f''(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ は $x = a$ で極大

微分の応用

定義 (下に凸、上に凸)

関数 $f(x)$ が閉区間 I で下に凸

$\Leftrightarrow a < b < c$ ならば

$$f(b) \leq \frac{c-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c)$$

関数 $f(x)$ が閉区間 I で上に凸

$\Leftrightarrow a < b < c$ ならば

$$f(b) \geq \frac{c-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c)$$

定義 (変曲点)

$x = a$ で下に凸から上に凸、または上に凸から下に凸へ変わるとき a を変曲点と呼ぶ。

定理 17 (凹凸)

以下は同値

- (1) $f(x)$ は下に凸 (上に凸)
- (2) $f'(x)$ は増加関数 (減少関数)
- (3) $f(x)$ のグラフは接線より上 (下)
- (4) $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$)

命題

$f''(a) = 0$ かつ $f'''(a) \neq 0$ ならば $x = a$ は変曲点

$f''(a) = 0$ かつ $x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変われば $x = a$ は変曲点

微分の応用

○ グラフの概形を得るために

(1) $f'(x), f''(x)$ を計算して $f'(x) = 0, f''(x) = 0$ になる点を求める。

(2) 増減表を書いてみる。

○ 例

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ の概形を書いてみる。

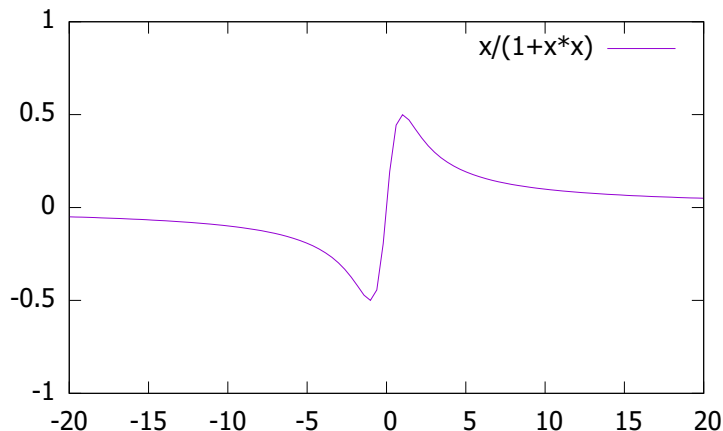
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \text{ より}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \quad f''(x) = 0 \rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	∞
f(x)	0	変	極小	変	極大	変	0
f'(x)		-	0	+	0	-	
f''(x)		-	0	+	0	-	+

微分の応用

実際にこの関数をソフトウェアを使って書くと



極小から極大の間の凹凸はこのグラフからは良く分からない。

問題

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$$

の増減表を与え、概形を書け。

グラフソフトを使ってもよいが、使う前に必ず手書きで概形を書き、手書きのグラフを送るように。