# 基礎数理 AI 第 5 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 2 ターム

# 微分法

微分積分は、物体の運動を理解するために出てきたものであるが、理工系の分野を含めて多くの分野の基礎になっている。あまりその歴史などを考えずに進める。

# 微分法

## 定義　（微分）

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき、関数 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能である。
この極限値を $x=a$ での微分係数と呼び、
$f'(a)$, $\dfrac{d}{dx}f(a)$, $\dfrac{df}{dx}(a)$ と書く。

## 定義　（右微分、左微分）

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき、関数 $f(x)$ は $x=a$ で右微分可能である。
$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき、関数 $f(x)$ は $x=a$ で左微分可能である。

# 微分法

微分自体は各点でしか定義されていないが、直感的、計算上は次のようなことを想定している。実際に我々がよく知っている関数は、$\mathbb{R}$ 上の微分可能関数（もしくはもっと良いもの）ばかりであり、導関数が計算できるものばかりである。

**定義**

関数 $f(x)$ が、区間 $I$ 上の各点で微分可能なとき $f(x)$ は区間 $I$ 上で微分可能と呼ぶ。
各点での微分係数を値に持つ関数を導関数と呼ぶ。

図形的な性質から接線は定義されるべきであるが、この授業では天下り的に次で定義してしまう。

**定義　（接線）**

関数 $f(x)$ に対して $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ を接線と呼ぶ。

# 微分法

微分は極限を使って定義しているので、極限の性質を受け継ぐ。

**定理 1**

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能
$\Rightarrow f(x)$ は $x = a$ で連続

**定理 2**

関数 $f(x), g(x)$ は微分可能であるとすると、以下はすべて微分可能で

(1) $\Big(f(x) \pm g(x)\Big)' = f'(x) \pm g'(x)$

(2) $\Big(f(x)g(x)\Big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

# 微分法

## 定理 3

関数 $f(x), g(x)$ は微分可能であるとすると、合成関数
$g \circ f(x) = g(f(x))$ も微分可能で

$$\Big(g \circ f\Big)'(x) = \Big(g(f(x))\Big)' = f'(x)g'(f(x)) = f'(x)g' \circ f(x)$$

これらの性質に加えて、大学入試で出てきた関数の微分と、次に出す逆関数微分の公式を使って出した、逆三角関数の微分があれば、我々の知っているほぼすべての関数が微分できる。（教科書 31 ページに基本的な関数の微分があるが、これらは知っているものとして取り扱う。）

**定理 4　（逆関数の微分）**

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は $f(x)$ が微分可能で、 $f'(x) \neq 0$ ならば微分可能で

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

この定理においては逆関数も微分可能であるということを示すのは大変であるが、そのあとの公式は次のように簡単に出る。
逆関数の性質から $f(f^{-1}(x)) = x$ であるので、合成関数の微分として両辺微分することで、

$$(f^{-1})'(x)f'(f^{-1}(x)) = 1$$

これから公式は出る。

# 微分法

## 問題

逆三角関数 $\arcsin x$,　$\arccos x$,　$\arctan x$ の微分は教科書によると (p.31)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

となっているが、逆関数微分の公式を使ってこれを導け。
教科書はかなり省略しているので、間を埋めるように。

# 微分法

$f(x) = x^x$ を微分せよという問題に対応する命題

**命題　（対数微分）**

$y = f(x)$ を両辺 log をとり $\log y = \log f(x)$、さらに微分することで

$\dfrac{y'}{y} = (\log f(x))'$ より $y' = y(\log f(x))'$

実際に $f(x) = x^x$ に適用してみると

$\log f(x) = x \log x$ なので $f'(x) = y' = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$

**問題**

$f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ の微分を求めよ

# 微分法

**定理 5　（パラメータ表示された関数の微分）**

$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ は微分可能で $\varphi'(t) \neq 0$ とする

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

# 微分法

○ 高次導関数

**定義**

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能なとき $f(x)$ は 2 回微分可能であるといい

$(f'(x))' = f''(x)$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$, $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(x)$ と書き 2 回導関数と呼ぶ。

以下帰納的に $n-1$ 回導関数が微分可能なとき $f(x)$ は $n$ 回微分可能であるといい

$f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$, $\dfrac{d^n f}{dx^n}(x)$ と書き $n$ 回導関数と呼ぶ。

# 微分法

## 定義

関数 $f(x)$ の $n$ 回導関数が連続なとき $f(x)$ は $n$ 回連続微分可能であるといい
$n$ 回連続微分可能な関数全体を $C^n$ と書く
連続関数全体は $C$ と書く。

**定理 6　（ライプニッツの公式）**

$f, g \in C^n$ ならば

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + {}_nC_1 f^{(n-1)}g^{(1)} + \cdots + {}_nC_r f^{(n-r)}g^{(r)} + \cdots + fg^{(n)}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r f^{(n-r)}g^{(r)}$$

# 微分法

○ 例 $\arctan x$ の $n$ 回微分

$f(x) = \arctan x$ とする。逆関数の微分をすることで

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ になるので書き換えて $1 = (1+x^2)f'(x)$

この両辺を $n$ 回微分するのにライプニッツの公式が使えて

$$0 = \{(1+x^2)f'(x)\}' = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r (1+x^2)^{(n-r)}(f'(x))^{(r)}$$

であるが直接計算することで

$(1+x^2)^{(0)} = 1+x^2,\quad (1+x^2)^{(1)} = 2x,\quad (1+x^2)^{(2)} = 2$

$(1+x^2)^{(r)} = 0$ （ただし $r \geq 3$）

これらを代入することで

$$0 = (1+x^2)(f'(x))^{(n)} + 2nx(f'(x))^{(n-1)} + 2\frac{n(n-1)}{2}(f'(x))^{(n-2)}$$

$$= (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x)$$

# 微分法

これを漸化式とみなして $f^{(1)}(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $f^{(2)}(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ を使えば原理的には $f^{(n)}(x)$ は分かる。

## 問題

一般の $x$ に関して $f^{(n)}(x)$ の具体的な表記は難しいが、$f^{(n)}(0)$ に関しては次のように求まることを示せ

$$f^{(n+1)}(0)=\begin{cases}(-1)^{n/2}n! & n \text{ が偶数}\\ 0 & n \text{ が奇数}\end{cases}$$