

基礎数理 AI 第 2 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 2 ターム

極限

前回の話では、「収束していることが分かっていけばうまくいく」話をした。

逆に、「いつ収束するか？」が問題になる。

収束することが分かって、その極限値の値や、その性質がよく分からないものもある。

極限

定義

$\{a_n\}$ が単調増大列（単調減少列）

$$\Leftrightarrow \forall n, a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1})$$

定理

上に有界な単調増大列は収束する。
（下に有界な単調減少列は収束する。）

極限

定義

$\{a_n\}$ がコーシー列

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ s.t. } \forall n, m \geq N, |a_n - a_m| \leq \varepsilon$$

コーシー (Cauchy) : 人名

注意

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ s.t. } \forall n \geq N, |a_n - a_{n+1}| \leq \varepsilon$$

ではコーシー列にならないものがある。

例 : $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

極限

命題

$\{a_n\}$ はコーシー列 $\Leftrightarrow \{a_n\}$ は収束する

注意

$\{a_n\}$ が収束することが分かっていてもその極限值が分かるわけではない。

これらの抽象的な結果を実際に適用してみる。

例（教科書例題3）

$\{a_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ は収束する

問題

$\{a_n\}$ は2項定理により a_n を展開することで単調増大列だと教科書では書いてあるが、これを納得できないと言っている N 君に良く分かるように解説せよ。

同様にこの展開を見れば $a_n < 3 (\forall n)$ であると教科書では書いてあるが、これを納得できないと言っている N 君に良く分かるように解説せよ。

極限

この問題ができていることを仮定すると、数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調増大列になっているので収束する。

一方で収束することは分かるが、2 から 3 の間の数である程度のことしか分からない。

すでに高校の数 3 で習っていて、この極限値を e として指数関数は $a^x = e^{\lambda x} = \exp(\lambda x)$ と書き直した方が、特に微分積分の計算で楽になることが分かっている。

極限

例

$$\{a_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right\} \text{ は発散する}$$

命題から $\{a_n\}$ がコーシー列でないことを見ればよい。

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

よりコーシー列でないことが分かる。

おまけ

$$\{a_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right\} \text{ は発散するが定積分の知識を使えば、} a_n \text{ がほぼ}$$

$\log n$ であることが分かる。 $b_n = a_n - \log n$ とすると、結果的に単調増大列で、上に有界であることも分かる。従って $\{b_n\}$ は収束し、オイラーの γ と呼ばれる。

例

漸化式

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = -a_n^2 + a_n + \frac{1}{16}, \quad (n \geq 1)$$

で与えられる数列 $\{a_n\}$ は収束するか?

収束する場合その極限值は?

「 $0 \leq a_n \leq \frac{1}{4}$ ならば $a_{n+1} \geq a_n$ かつ $0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{4}$ 」が示せたとする。

このとき $\{a_n\}$ は上に有界な単調増大列なので収束することは分かる。

極限

収束していれば、漸化式の両辺で極限をとることができ、極限値を α とおけば

$$\alpha = -\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{16}$$

を満たすので、この方程式を解いて $\alpha = \pm \frac{1}{4}$

$0 \leq a_n \leq \frac{1}{4}$ を満たすので、極限値も $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$ を満たすので、

$$\alpha = \frac{1}{4}$$

極限

最後に「」が正しいことを示す。

$$-a_n^2 + a_n + \frac{1}{16} = -(a_n - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{16}$$

より $0 \leq a_n \leq \frac{1}{4}$ ならば

$$\frac{1}{16} \leq -(a_n - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{16} \leq \frac{1}{4}$$

$$a_{n+1} - a_n = -a_n^2 + a_n + \frac{1}{16} - a_n = -a_n^2 + \frac{1}{16} = -(a_n + \frac{1}{4})(a_n - \frac{1}{4})$$

より $0 \leq a_n \leq \frac{1}{4}$ ならば $a_{n+1} \geq a_n$ である。

□

例

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

で与えられる数列は共に収束する。

a_n が単調増大列であることは明らか。

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

より上に有界

従って $\{a_n\}$ は上に有界な単調増大列なので収束する。

一方で b_n は単調増大でも単調減少でもないのに工夫が必要。

コーシー列であることを a_n を使って示す。

極限

$\{a_n\}$ が収束することはすでに示したので、命題を使うことで $\{a_n\}$ はコーシー列である。また $m < n$ として

$$|b_n - b_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} = |a_n - a_m|$$

この不等式から $\{b_n\}$ もコーシー列であることが分かり、収束する。 □

この授業の範囲内では極限值は分からないが、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\pi^2}{12}$$

が知られている。

問題

$a, b > 0$ とする。

$\left\{ \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \right\}$ は収束するか？ 収束する場合その極限值を求めよ
(いわゆる大学受験の知識を使ってよい。)