

応用数理 E 期末レポート

問 1 1 から 5 の数字が書かれた玉が 1 つずつ箱の中に入っており、まず A が 1 つ玉を取り出し、残った玉の中から B が 1 つ玉を取り出す。このとき（多少中の玉が分かるため）ある同時分布に従って玉を取り出すものとする。N 先生が同時分布表を渡してくれたが何か所か読み取れないところがあり、読み取れる部分は以下のようであった。（空欄のところは読み取れなかった。）

		B					
		1	2	3	4	5	計
A	1				0.03	0.04	
	2			0.03	0.04	0.06	
	3		0.02	0	0.06	0.12	
	4	0.01	0.02	0.08	0	0.15	0.26
	5	0.01	0.02	0.1	0.15	0	0.28
	計			0.23	0.28	0.37	

N 先生に再度問い合わせるのは時間がかかるため、以下のようにする。

(1) 同時分布表になるようにパラメータを入れて考えられる全てのパターンを取り扱えるようにする。このとき 2 つパラメータを与えればよいが、そのパラメータを加えることで同時分布を完成せよ。またそのパラメータに関する条件を与えよ。

(2) A_2 を A が 2 以下の玉を取り出す事象、 B_2 を B が 2 以下の玉を取り出す事象とする。

$P(A_2), P(B_2), P(A_2 \cap B_2), P_{A_2}(B_2)$ を (1) で与えたパラメータを用いて表せ。

(3) 事象 A_2 と B_2 が独立であるか判定せよ（独立になるための (1)(2) で求めたパラメータに関する条件を求めよ）。

問 2 あるネットワークゲームは A, B, C の 3 つのサーバーがありゲームに参加するときにランダムに A 15 %, B 30 %, C 55 % に割り振られる。ゲームに参加した報酬としてアイテムを 1 つもらうが、良いアイテムと普通のアイテムがあり、それぞれのサーバーごとに A 0.05 %, B 0.03 %, C 0.01% で良いアイテムをもらえる。

(1) N 君がこのゲームに参加したとき良いアイテムをもらった。この時の N 君が A のサーバーに割り振られた確率を求めよ。

(2) ゲームの運営者が間違っって良いアイテムをもらえる確率を A 0.5 %, B 0.3 %, C 0.1% と設定してしまった。N 君がこのゲームに参加したとき良いアイテムをもらった。この時の N 君が A のサーバーに割り振られた確率は先ほどの結果と比べてどのように変わるかを与えよ。

問 3

$X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$ とする。すなわち X, Y 共に標準正規分布に従う。

(1) X, Y が独立のとき

$$P(-1.23 \leq X \leq 0.55, -0.13 \leq Y \leq 1.14)$$

を求めよ。

(2) 次の確率の最大値、最小値を求めよ。

$$P(-1.23 \leq X \leq 0.55, -0.13 \leq Y \leq 1.14)$$

問4 n は 1 以上の整数とする. X は

$$P(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n+1)}, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, n)$$

を満たし, Y の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられるとき, それぞれに対して平均 $E[X], E[Y]$, 分散 $V[X], V[Y]$ を求めよ.

問5 N 先生はあるテストを毎年行っているが、その結果からその点数の分布に関して次のような予想を得て、確率モデルを作ろうとしている。

- X をテストの点数に対応する確率変数とする。
- 点数は 0 点から 100 点の整数値である。
- k 点を取る確率と l 点を取る確率の比は次で与えられる。

$$\frac{P(X = k)}{P(X = l)} = \frac{(50 + k)(200 - k)}{(50 + l)(200 - l)}$$

(1) これらを全て満たす確率モデルに対して $P(X = k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 100$) を与えよ。

(2) このモデルに対して平均 $E[X]$, 分散 $V[X]$ を求めよ。

問6 N 先生は実験のため正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う乱数を発生させデータを取ったが、 μ, σ^2 を書いておいたメモをなくしてしまった。この μ, σ^2 をデータから再現したいがどのような考え方で再現すればよいかを与え、実際に再現せよ。

なおデータに関しては data-01.csv から data-10.csv が準備されているが、学籍番号の最後の数字にあわせて使用するように。