応用数理E第6回目

永幡幸生
新潟大学工学部

4月26日

期待値と分散

期待値、平均値

定義

確率変数 X に対して、期待値 $E[X]$ を

$$E[X] = \begin{cases} \displaystyle\sum_k kP(X = k) & \text{離散型} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx & \text{連続型} \end{cases}$$

と定義する。

この定義で無限和、広義積分は定義できれば意味を持つものとする。

期待値と分散

定義

確率変数 X と関数 u に対して
$Y = u(X)$ とすると、確率変数になるので、

$$E[u(X)] = E[Y] = \begin{cases} \sum_k kP(Y = k) = \sum_l u(l)P(X = l) & \text{離散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)dx & \text{連続型} \end{cases}$$

と定義できる。

注意

特に $E[X^2], E[X^n], E[e^{-\lambda X}], E[e^{-i\lambda X}]$ が重要

期待値と分散

定理 3.1

(1) 確率変数 X と定数 a, b に対して
$E[aX + b] = aE[X] + b$
(2) 確率変数 X, Y と定数 a, b, c に対して
$E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c$

問題

定理 3.1 を連続型確率変数の場合に証明せよ。

期待値と分散

定義

確率変数 X の期待値を $\mu = E[X]$ とおく。このとき
$V[X] = E[(X - \mu)^2]$
を分散と呼ぶ。

定理 3.2

確率変数 X と定数 a, b に対して
$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
$V[aX + b] = a^2 V[X]$

問題

定理 3.2 を証明せよ。

期待値と分散

定義

$D[X] = \sqrt{V[X]}$
を標準偏差と呼ぶ。

期待値と分散

$E[XY]$ に関しては一般にはほとんど何も言えない。

定義

確率変数 X, Y に対して $\mu_x = E[X], \mu_y = E[Y]$ としたとき
$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$
を共分散と呼ぶ。

期待値と分散

定理 3.3

確率変数 X, Y, Z と定数 a, b に対して

(0) $\mathrm{Cov}(X, X) = V[X]$

(1) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X) = E[XY] - E[X]E[Y]$

(2) $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\mathrm{Cov}(X, Y)$

(3) $V[X + Y] = V[X] + V[Y] + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$

(4) X, Y が独立ならば

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

$$V[X + Y] = V[X] + V[Y]$$

(5) $\mathrm{Cov}(X + Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$

期待値と分散

問題

離散型一様分布、二項分布 $B(n.p)$、ポアソン分布 $Po(\lambda)$ に対して、期待値、分散を求めよ。