

マルコフ連鎖入門 第4回

永幡幸生
新潟大学

nagahata@eng.niigata-u.ac.jp

2021 第1学期

Markov 連鎖

例題としてよく挙げられるランダムウォークは、Markov 連鎖の典型例であるが、その推移確率は場合の数 ${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ を使って書き表される。

この $n!$ に関して n が大きくなった時の近似を求める。

定理（スターリングの公式）

以下が成立する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}} = 1$$

よく以下のように書かれる。

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}$$

$n!!$ を以下のように定義する

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 4 \cdot 2 & n \text{ が偶数} \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 3 \cdot 1 & n \text{ が奇数} \end{cases}$$

補題 (ウォリスの公式)

以下が成立する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sqrt{n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

補題 (ウォリスの公式) の証明

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^n d\theta$$

とおく。

問題

部分積分を行なうことにより

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

を示し、 I_0, I_1 を計算することで、

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

を示せ。

I_n に問題の結果を代入することで

$$\begin{aligned}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} &= \frac{(2n)!!(2n)!!}{(2n+1)!!(2n-1)!!} \frac{2}{\pi} \\ &= \frac{(2n)!!(2n)!!}{(2n+1)!!(2n+1)!!} \frac{2(2n+1)}{\pi} \\ &= \left(\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 \frac{2(2+1/n)}{\pi}\end{aligned}$$

$0 \leq \sin \theta \leq 1$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) より $n > m$ ならば $\sin^n \theta < \sin^m \theta$ が成り立つ。よって積分に対しても同様の不等式 $n > m$ ならば $I_n < I_m$ が成り立つ。これより特に

$$I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$$

であるので

$$\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$$

が成り立つ。

前ページの結果と前々ページの結果を合わせることで

$$\frac{2n+1}{2n+2} \frac{\pi}{2(2+1/n)} \leq \left(\sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^2 \leq \frac{\pi}{2(2+1/n)}$$

はさみうちの定理により $n \rightarrow \infty$ とすることで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sqrt{n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を得る。



定理（スターリングの公式）の証明

問題

$y = 1/x$ のグラフと $(n, 1/n)$ と $(n+1, 1/(n+1))$ を結んだ直線と $(n+1/2, 1/(n+1/2))$ での $y = 1/x$ の接線を考えることにより

$$\frac{1}{n+1/2} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

を示せ。

スターリングの公式の結論の一部（定数をなくしたもの）を

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}} \text{ と定義する。}$$

問題

a_n を代入して計算することにより

$$\log \frac{a_n}{a_{n+1}} = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

を示せ。

Markov 連鎖

前ページ問題中最後の $\log(1 + 1/n)$ に、前々ページの問題中の不等式を代入して計算することで

$$0 < \log \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4n(n+1)}$$

を得る。

この不等式の n を n から $2n-1$ まで足し合わせることで

$$0 < \sum_{k=n}^{2n-1} \log \frac{a_k}{a_{k+1}} < \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{8n}$$

になるため、はさみうちの定理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{2n}} = 1$$

となる。

a_n の定義から代入して計算することで、

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} \frac{\sqrt{2n}}{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} 2\sqrt{n}$$

を得るが、書き換えて

$$a_n = \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} 2\sqrt{n} \right) \frac{a_{2n}}{a_n} \frac{2n+1}{\sqrt{2n}}$$

と書ける。

この式で $n \rightarrow \infty$ の極限を考えると、前ページの結果と、補題 (ウォリスの公式) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2\pi}$$

が分かる。

