

基礎数理 B 期末レポート

問 1

行列 A, B は共に $(5,4)$ 型行列であり、全ての成分は正の整数で、 $\text{rank} A = 4, \text{rank} B = 3$ とする。

(1) このような A, B の例を 1 組与えよ。

(2) (1) で与えた A, B に対してそれぞれ $(1,2)$ 成分、 $(3,4)$ 成分、 $(5,6)$ 成分を書け。

(3) (1) で与えた A, B に対して次の計算をせよ。なお計算できない（定義できない）場合はその理由を書け。

$$A + B, \quad {}^t A + B, \quad AB, \quad {}^t AB$$

問 2

行列 A, B, C, D を次のように定義する

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 7 & 7 \\ 10 & 6 & 13 & 16 \\ 25 & 10 & 25 & 21 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 8 & 8 \\ 8 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

(1) A, B, C, D それぞれの行列式求めよ。

(2) A, C それぞれの逆行列を求めよ。

問 3

次の方程式が解を持つパラメータ a の条件を求め、その時の解を全て求めよ。

$$(1) \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ x + 11y + 5z = a \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 4 \\ 2x + y + 5z = 3 \\ x + 4y + 8z = a \end{cases}$$

問 4

次の A, B を対角化して A^n, B^n を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 - 2\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

問 5

(1) 次を計算せよ ((2) の問題との関係を考えよ)

$$\begin{pmatrix} E & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

(2) 次の等式を示せ

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \det A \det C, \quad \text{ただし } A, C \text{ は正方行列とする。}$$

(3) 次の等式を示せ

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - B & B \\ C - D & D \end{pmatrix}$$

(4) 次の式はかなり正しいが等式ではない。誤りを訂正せよ。

$$\det \begin{pmatrix} A & -A \\ B & B \end{pmatrix} = 2 \det A \det B, \quad \text{ただし } A, B \text{ は } n \times n \text{ 行列とする。}$$

問6

N先生の職場の近くには、和食、中華、洋食のレストランが1件ずつあり、N先生はそのうちの1件で昼食をとっている。N先生が選ぶ店は、前日に行ったお店は選ばず、他の2件からランダムに選んでいる。その確率は前日が和食であった場合中華 0.4 洋食 0.6、中華であった場合和食 0.3 洋食 0.7、洋食であった場合和食 0.6 中華 0.4 である。

行列 A を今日和食レストランで食事を取った時の1日後に和食、中華、洋食のレストランで昼食を取る確率を A の (1,1)、(1,2)、(1,3) 成分で、今日中華レストランで食事を取った時の1日後に和食、中華、洋食のレストランで昼食を取る確率を A の (2,1)、(2,2)、(2,3) 成分で、今日洋食レストランで食事を取った時の1日後に和食、中華、洋食のレストランで昼食を取る確率を A の (3,1)、(3,2)、(3,3) 成分で表されるように定義すると、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

と表される。

- (1) 今日和食レストランで食事をとった場合、 n 日後に和食レストランで食事をとっている確率は A^n の (1,1) 成分になることを示せ。
- (2) A を対角化して A^n を求めよ。
- (3) n を十分大きくしたとき n 日間中和食レストランで食事をとった割合は収束するか？また収束する場合は A のどのような値で表されるか述べよ。