基礎数理 B 第 11 回目以降のレポートに関して

永幡幸生
新潟大学工学部

11 月 27 日

固有値・固有ベクトル

第 11 回から第 14 回にかけて、固有値、固有ベクトルを求め、対角化、n 乗までが一続きであるべき問題を授業の進度に合わせて、区切ったので、これらはまとめて（行列ごとに）行うことにする。
とりあえず固有値・固有ベクトルを求めるだけの問題の解答例を先に示す。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

に関して。
固有多項式を計算すると、サラスの公式を使えば

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$= \{(\lambda-3)\lambda(\lambda-3) + (-2)(-2)(-4) + (-4)(-2)(-2)\}$$

$$-\{(\lambda-3)(-2)(-2) + (-2)(-2)(\lambda-3) + (-4)\lambda(-4)\}$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda - 8 = (\lambda+1)^2(\lambda-8)$$

固有値・固有ベクトル

従って固有値は -1 (重複) 、8 となる。
固有値 $\lambda = -1$ に対して、行基本変形を繰り返せば
(途中経過省略)

$$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になり $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解はパラメータ s_1, s_2 を用いて

$$\mathbf{x} = s_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けるため固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトル

同様に固有値 $\lambda = 8$ に対して、行基本変形を繰り返せば
(途中経過省略)

$$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になり $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解はパラメータ s を用いて

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けるため固有値 $\lambda = 8$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

なお A は対角行列なので、固有ベクトルが固有値の重複度分だけ出ることとは計算する前から分かっている。（対角行列は直交行列で対角化可能）

固有値・固有ベクトルから対角化・n 乗

先にも書いたが、固有値、固有ベクトルを求め、対角化、n 乗までが一続きであるべき問題を授業の進度に合わせて、区切ったので、これらはまとめて行列ごとに行う。このため A_{15}, A_{18} も戻って固有値から計算する。
なお行列式の計算、非自明解を解くときの基本変形、逆行列の計算など、多くの計算を省略する。

固有値・固有ベクトルから対角化・n 乗

$A = A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

固有値を計算すると

$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -7 \\ 0 & \lambda - 9 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 9)$

より固有値は $0, 9$

固有値 $\lambda = 0$ に対応して

$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

になり（必要ならば方程式に戻って） 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

同様に固有値 $\lambda = 9$ に対応して

$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -7/9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

になり（必要ならば方程式に戻って） 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 7/9 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値・固有ベクトルから対角化まで

これらの固有ベクトルを並べて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 7/9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると逆行列は

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -7/9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。これより以下を計算することで

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9^n \end{pmatrix}$$

より

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \cdot 9^{n-1} \\ 0 & 9^n \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトルから対角化・n 乗

$$A = A_{18} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

固有値を計算すると

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ -9 & \lambda - 6 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 6)$$

より固有値は $0, 6$

固有値 $\lambda = 0$ に対応して

$$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になり（必要ならば方程式に戻って）固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

同様に固有値 $\lambda = 6$ に対応して

$$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になり（必要ならば方程式に戻って）固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値・固有ベクトルから対角化まで

これらの固有ベクトルを並べて

$$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると逆行列は

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。これより以下を計算することで

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}$$

より

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3/2 \cdot 6^n & 6^n \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトルから対角化・n 乗

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

固有値を計算すると

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -7 & -5 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 5 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

これより固有値は $1, -1, 2$

固有値・固有ベクトルから対角化まで

固有値 $\lambda = 1$ に対応して、行基本変形を繰り返して

$$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になり（必要ならば方程式に戻って） 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

同様に固有値 $\lambda = -1$ に対応して、行基本変形を繰り返して

$$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} -5 & -7 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になり（必要ならば方程式に戻って） 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値・固有ベクトルから対角化・n 乗

固有値 $\lambda = 2$ に対応して、行基本変形を繰り返して

$$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になり（必要ならば方程式に戻って） 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値・固有ベクトルから対角化まで

これらの固有ベクトルを並べて

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、行基本変形を繰り返して

$$(PE) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトルから対角化・n 乗

これから

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

になる。このとき $\Lambda^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

であり

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n - (-1)^n + 1 & 2^n - 3(-1)^n + 2 & 2^n - 2(-1)^n + 1 \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^n + (-1)^n - 2 & 2^n + 3(-1)^n - 4 & 2^n + 2(-1)^n - 2 \end{pmatrix}$$

になる。

固有値・固有ベクトルから対角化まで

○ 授業中に言った通り、対角化をするだけの問題は、あくまで数学のテストだけの話。通常は n 乗などのようにそこから計算を行うことが前提としてあるので、必ず P^{-1} まで計算するように。

○ 固有ベクトルの並べ方から対角化された Λ の形はすぐに分かるので $P^{-1}AP$ の計算を省略することは可能。ただし（特に手計算でやる場合）検算をこめて計算をしてみた方が良い。途中で間違っていれば想定していない（明らかに対角化されていない）結果になる。当然前の方で間違っているので、計算のやり直しになる。

○ n 乗の計算で合っているか自信がないときは $n = 1$ を代入してみる。当然 A そのものになる。なっていなければやはりどこかで計算間違いをしている。