基礎数理 B 第 14 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 3 ターム

対角化の応用

前回まで、とにかく対角化の計算方法を述べてきた。
実際にどのようなときに対角化が有効であるかを挙げる。
一番わかりやすい例は A^n である。
理学、工学分野では、行列を使うと時間発展がうまく書け、ある物理量の時刻 n での値が A^n (のある成分) で書けることがよくある。
一方で定義通りに A^n を計算するのはかなり大変である。

対角化の応用

例えば $A = A_{17} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ を挙げると、定義通りに $A^2, A^3, \ldots$ を計算してみると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 54 \\ 9 & 55 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 10 & 54 \\ 9 & 55 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 438 \\ 73 & 439 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 74 & 438 \\ 73 & 439 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 586 & 3510 \\ 585 & 3511 \end{pmatrix}$$

と計算でき、ある程度の性質は見えている気もするが、一般項を予想するのはまずできそうにもない。

対角化の応用

一方で A_{17} は前回 $P = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$P^{-1} = \dfrac{-1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$ になり

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \Lambda$ と対角化できた。

A^n の計算は大変で、できそうにもないが、対角行列であれば Λ^n は簡単に計算できて

$\Lambda^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8^n \end{pmatrix}$

と単純に対角成分を n 乗したものになる。

対角化の応用

これより、掛け算の順番を変更することで、
$\Lambda^n = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})A\cdots A(PP^{-1})AP$
$= P^{-1}A^nP$
と計算できる。右辺、左辺に左から P、右から P^{-1} をかけることにより
$A^n = P\Lambda^nP^{-1}$
と書ける。これに実際代入することで

$$A^n = \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6+8^n & -6+6\times 8^n \\ -1+8^n & 1+6\times 8^n \end{pmatrix}$$

と計算できる。

対角化の応用

命題 A^n

正方行列 A が P, P^{-1} を使って対角行列 Λ に対角化できるとき、すなわち
$P^{-1}AP = \Lambda$
と書けるとき
$A^n = P\Lambda^n P^{-1}$
と書ける。

注意

前回 A_{17} に関して、2 通りの対角化ができることを述べた。
A^n の計算に関しては、$A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ を計算してみると結果的に同じものが出てくることが分かる。

対角化の応用

前回計算が大変な例として $A_{16} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ を挙げたが、この場合 $P = \begin{pmatrix} \frac{-(3-\sqrt{129})}{10} & \frac{-(3+\sqrt{129})}{10} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$P^{-1} = \frac{5}{\sqrt{129}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3+\sqrt{129}}{10} \\ -1 & \frac{-(3-\sqrt{129})}{10} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A_{16}P = \begin{pmatrix} \frac{7+\sqrt{129}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7-\sqrt{129}}{2} \end{pmatrix} = \Lambda_{16}$$

と対角化できた。
これを使って A_{16}^n を計算してみると

対角化の応用

$$A_{16}^n = P\Lambda_{16}^n P^{-1} = \frac{5}{\sqrt{129}}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ただし

$$a_{11} = \frac{\sqrt{129}-3}{10}\left(\frac{7+\sqrt{129}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{129}+3}{10}\left(\frac{7-\sqrt{129}}{2}\right)^n$$

$$a_{12} = \frac{6}{5}\left(\frac{7+\sqrt{129}}{2}\right)^n - \frac{6}{5}\left(\frac{7-\sqrt{129}}{2}\right)^n$$

$$a_{21} = \left(\frac{7+\sqrt{129}}{2}\right)^n - \left(\frac{7-\sqrt{129}}{2}\right)^n$$

$$a_{22} = \frac{\sqrt{129}+3}{10}\left(\frac{7+\sqrt{129}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{129}-3}{10}\left(\frac{7-\sqrt{129}}{2}\right)^n$$

と書ける。

全ての成分が整数の行列なので、成分は必ず整数になる。

この成分を見ていると整数になるようには見えないが、キャンセルがおき、整数になる。

対角化の応用

定義　行列多項式

多項式 $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$ に対して x に正方行列 A を代入し、最終項を c_nE と思い
$f(A) = c_0A^n + c_1A^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + c_nE$
を行列多項式と呼ぶ。

定理 7.8　フロベニウス

n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とすると行列多項式 $f(A)$ の固有値は $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots f(\lambda_n)$

定理 7.8　ハミルトン・ケーリー

n 次正方行列 A の固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ に対して、行列多項式は
$\phi_A(A) = O$

対角化の応用

定理 7.10,7.11　実対称行列

実対称行列 A の固有値は全て実数になり直交行列 T により
$T^{-1}AT = {}^tTAT = \Lambda$
と対角化できる。

定理 7.10,7.11 の拡張　エルミート行列

エルミート行列 H の固有値は全て実数になりユニタリ行列 U により
$U^{-1}HU = U^*HU = \Lambda$
と対角化できる。

対角化の応用

問題

次の行列の n 乗を計算せよ

$$A_{15}, \quad A_{18}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

これらの行列の対角化はすでに計算している。これらの結果は使用 (参照) しても構わない。