基礎数理 B 第 12 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 3 ターム

固有値・固有ベクトル

前回は計算が楽なものを選んだが、実際には次のような大変な計算になる方が多い。

$A_{16} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ の場合

$$\det(\lambda E - A_{16}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -6 \\ -5 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda - 20$$

これより固有値は $\lambda = \dfrac{7 \pm \sqrt{129}}{2}$

固有値・固有ベクトル

固有値 $\lambda = \dfrac{7+\sqrt{129}}{2}$ に対して

$$(\lambda E - A_{16}) = \begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{129}}{2} & -6 \\ -5 & \dfrac{-3+\sqrt{129}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{3+\sqrt{129}}①} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-12}{3+\sqrt{129}} \\ -5 & \dfrac{-3+\sqrt{129}}{2} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

ここで $\dfrac{-12}{3+\sqrt{129}} = \dfrac{-12\left(3-\sqrt{129}\right)}{(3+\sqrt{129})(3-\sqrt{129})}$

$$= \frac{-12(3-\sqrt{129})}{-120} = \frac{3-\sqrt{129}}{10}$$

固有値・固有ベクトル

これより (*) から続けると

$$\xrightarrow{②+5①} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{3-\sqrt{129}}{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って非自明解は $\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} \dfrac{-(3-\sqrt{129})}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$,

固有値 $\lambda = \dfrac{7+\sqrt{129}}{2}$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-(3-\sqrt{129})}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトル

固有値 $\lambda = \dfrac{7-\sqrt{129}}{2}$ に対して同様に計算すると

固有値 $\lambda = \dfrac{7-\sqrt{129}}{2}$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-(3+\sqrt{129})}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

固有値・固有ベクトル

さらに厳しい例として教科書より $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1$$

これより固有値は $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ と複素数になる。気にせず続けると

固有値 $\lambda = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ に対して

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}E - A_{16}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{-3+\sqrt{3}i}{2} & 3 \\ -1 & \dfrac{3+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{-3+\sqrt{3}i}①} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{6}{-3+\sqrt{3}i} \\ -1 & \dfrac{3+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

固有値・固有ベクトル

ここで $\dfrac{6}{-3+\sqrt{3}i} = \dfrac{6(3+\sqrt{3}i)}{(-3+\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i)} = \dfrac{-(3+\sqrt{3}i)}{2}$

より (**) から続けると

$$\xrightarrow{②+①} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-(3+\sqrt{3}i)}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って非自明解は $\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,

固有値 $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値・固有ベクトル

固有値 $\lambda = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ に対して同様に計算すると

固有値 $\lambda = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \dfrac{3-\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

となり固有ベクトルも複素数になる。

固有値・固有ベクトル

固有値が重複する場合は一番単純な例では

$A = aE \quad (a$ は定数$)$ とすると

$$\det(\lambda E - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2$$

となり $\lambda = a$ が固有値（重複）になる。

対応する固有ベクトルは

$\lambda E - A = O$

になり非自明解は $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ になり

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と 2 個すなわち重複度分取れる。

固有値・固有ベクトル

これに対して $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

となりこの場合も固有値は重複し、 $\lambda = 1$ が固有値（重複）になる。

一方で固有ベクトルを計算すると、

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-①} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので非自明解は $\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ になり

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1 つしかない。（重複度より少ない）

固有値・固有ベクトル

サイズが大きくなると計算は大変になるが、本質的には同じ

例えば $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ に対して固有値、固有ベクトルを計算してみると

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -6 & -4 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 6 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

従って固有値は $-1, 1$ (1 は重複)

固有値・固有ベクトル

固有値 $\lambda = -1$ に対して

$$\lambda - A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1/2②]{-1/4①} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-2①} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-3②]{①-3/2②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

固有値・固有ベクトル

固有値 $\lambda = -1$ (重複) に対して

$$\lambda - A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1/2①} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-2①} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより非自明解は $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

従って固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトル

定義　固有空間

A を n 次正方行列 λ を A の固有値とする。
λ に関する固有ベクトル全体
$V(\lambda) = \{\mathbf{x}; (\lambda - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
を固有空間と呼ぶ。

定義　次元

同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に対して、非自明解全体を V とする。
$V = \{\mathbf{x}; A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
このとき V の次元 $\dim V$ を解を書くのに必要なパラメータの数で定義する。

固有値・固有ベクトル

命題　固有空間の次元

$\dim V(\lambda) = n - \mathrm{rank}\,(\lambda - A)$
$\dim V(\lambda) \geq 1$

定義　1 次独立、1 次従属

ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ が 1 次独立

$\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ となるのは $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ の時のみ。

ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ が 1 次独立でないとき 1 次従属と呼ぶ。

固有値・固有ベクトル

定理 7.4

n 次正方行列 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは 1 次独立

注意

$\dim V(\lambda) \leq$ 解 λ の重複度であり、
全ての固有値 λ で $=$ 成立 $\Leftrightarrow$ 良い例 (対角化可能)
ある固有値 λ で $<$ 成立 $\Leftrightarrow$ 悪い例 (対角化不可能)
である。

固有値・固有ベクトル

問題

次の行列の固有値、固有ベクトルを求めよ

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$