

基礎数理 B 第 11 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 3 ターム

固有値・固有ベクトル

固有値・固有ベクトルに入る前に、今まで出てきた、行列式、正則、階数、方程式などの関係をまとめておく。

固有値・固有ベクトル

定義 自由度

連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ 、ただし A は (m, n) 行列とし、解は存在するものとする。

このとき $n - \text{rank } A$ を解の自由度と呼ぶ。

注意

解の自由度は、この方程式の解を全て書き表すために必要なパラメータの数である。

定義 一般解、特殊解

パラメータ（任意定数）を使い全ての解を1つの式で書いたものを一般解、パラメータに特別な値を代入して得られた解を特殊解と呼ぶ。

注意

一般解、特殊解は連立1次方程式だけで使われる用語ではない。

定理 3.3

連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ に対して

この連立 1 次方程式が解をもつ $\Leftrightarrow \text{rank}(A \ \mathbf{c}) = \text{rank } A$

このとき一般解は $n - \text{rank } A$ 個のパラメータを使って書ける。

固有値・固有ベクトル

定義 同次

連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を同次方程式、斉次方程式と呼ぶ。

連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に対して明らかに $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は解になる。

定義 自明解、非自明解

連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に対してその解のうち
 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を自明解

それ以外の解（があったらそれ）を非自明解と呼ぶ。

定理 3.4

同次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に対して A を (m, n) 行列とする。このとき
非自明解をもつ $\Leftrightarrow \text{rank } A < n$
自明解のみ $\Leftrightarrow \text{rank } A = n$

注意

定理 3.4 の設定 (A は (m, n) 行列) の下では
 $\text{rank } A \leq n$

固有値・固有ベクトル

特に A が正方行列の場合次が成り立つ。

定理 3.5

行列 A が n 次正方行列の場合以下は同値

- (1) 同次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が非自明解を持つ
- (2) $\text{rank } A < n$
- (3) A は正則でない
- (4) $\det A = 0$

定理 3.6

行列 A が n 次正方行列の場合以下は同値

- (1) 同次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は自明解のみ
- (2) $\text{rank } A = n$
- (3) A は正則
- (4) $\det A \neq 0$

定義 基本解

同次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が非自明解をもつときその一般解が

$$\sum_{i=1}^k s_i \mathbf{x}_i,$$

ただし k はこの同時方程式の解の自由度、 s_i ($1 \leq i \leq k$) はパラメータとする。と書けたとき

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$

を基本解と呼ぶ。

基本解の取り方は一意的ではない。

命題（例題 3.6）

連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ が特殊解 $\mathbf{x}_0$ を持ち、
同次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が基本解 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ を持ったとする。
この時連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ の一般解は

$$\mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k s_i \mathbf{x}_i,$$

と書ける。

固有値・固有ベクトル

ここから固有値・固有ベクトルに入る。

特に行列の対角化を念頭に置いて話を進める。

行列の対角化に関してはこの授業の範囲外である線形写像を意識しながら学ぶのが望ましいが、一方で、道具として使うのであれば、必ずしも意識する必要はない。また行列が陽にでてこないまま実際には線形写像が裏に隠れていて、そこから対応する行列（を見ないまま）を対角化していることはよくある。

この授業では行列が与えられたときにいかにして対角化を行うか、計算方法を中心に話を進める。

固有値・固有ベクトル

定義 固有値、固有ベクトル

n 次正方行列 A に対して、

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

を満たす λ を固有値、 $\mathbf{x}$ を λ に対する固有ベクトルと呼ぶ。

このままでは実際に固有値、固有ベクトルが存在するかは不明だが、

$$(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

と書き直せば、今までの結果を使えば

$\det(\lambda E - A) \neq 0 \Rightarrow$ 同次方程式の解は自明解のみ

$\det(\lambda E - A) = 0 \Rightarrow$ 同次方程式に非自明解あり。

これより $\det(\lambda E - A) = 0$ から固有値 λ の候補を探す。

固有値・固有ベクトル

行列式は

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

より定義から、 λ の n 次多項式であることが分かる。

定義 固有多項式、固有方程式

$\det(\lambda E - A) = \phi_A(\lambda)$ を固有多項式
 $\phi_A(\lambda) = 0$ を固有方程式と呼ぶ。

固有値・固有ベクトル

定理 7.1

n 次正方行列 A に対して

(1) A の固有値は重複度を込めて n 個あり、これらは固有方程式の解として与えられる。

(2) 固有値 λ に対する固有ベクトルは

$$(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

の非自明解として与えられる。

注意

A が実行列でも固有値 λ は複素数になることもある。

注意

$\mathbf{x}$ が固有ベクトルであれば、 $c\mathbf{x}$ ($c \neq 0$) も固有ベクトルになる。
通常基底 (パラメータを省略した一組) を与える。

この授業でもパラメータは省略する。

注意

固有ベクトルを求めるのに、 $(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の非自明解を求めるが、同次の連立1次方程式の解を求めることになる。

前回までの方法だと、拡大係数行列 $((\lambda E - A) \ \mathbf{0})$ を行基本変形して解をもとめるのが自然だが、最後の列はどのような行基本変形をしても $\mathbf{0}$ のまま。

従って係数行列 $(\lambda E - A)$ だけを基本変形してその後ろに $\mathbf{0}$ がついていていると思って、解を求める。

固有値・固有ベクトル

注意

$\mathbf{x}$ が固有ベクトルであれば、 $c\mathbf{x}$ ($c \neq 0$) も固有ベクトルになることを使えば、 $\mathbf{x}$ の特定の成分（第 1 成分）を 1 として計算した方が早く簡単に固有ベクトルを求めることができることが多い。特に A が 2 次正方行列の場合は典型的な例になる。

一方で、サイズが大きくなった場合や、固有値が重複した場合は、非自明解を行列を用いて解く方が良い。

定理 7.2

n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると

$$(1) \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$(2) \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

(3) A が正則 $\Leftrightarrow$ 固有値 0 を持たない

固有値・固有ベクトル

計算がしやすく、結果も分かりやすい 2×2 行列の例を挙げる。

$$A_{17} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ の場合}$$

$$\det(\lambda E - A_{17}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -6 \\ -1 & \lambda - 7 \end{pmatrix} = (\lambda - 8)(\lambda - 1)$$

従って 固有値は $\lambda = 1, 8$

固有値 $\lambda = 1$ に対して

$$(1E - A_{17}) = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{従って非自明解は } \mathbf{x} = c \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{固有値 } \lambda = 1 \text{ に対応する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトル

固有値 $\lambda = 8$ に対して

$$(8E - A_{17}) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}/6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\textcircled{2}+\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って非自明解は $\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

固有値 $\lambda = 8$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

問題

次の行列の固有値と、対応する固有ベクトルを求めよ
 A_{15} , A_{18}