基礎数理 B 第 10 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 3 ターム

連立1次方程式

連立1次方程式はすでに第8回で取り上げたが、この時は必ず、解がただ一つに決まるときに、行列を使って解く方法を取り扱った。一般的に連立1次方程式は方程式の数と未知数の数の関係で次の3つに分類できる

(1) 解はただ一つに決まる。

(2) 解なし

(3) 解は無限に存在する。（パラメータを使って解を全て書ききることができる。）

与えられた連立1次方程式が (1) ～ (3) のどれに対応するのか、さらに（(3) の場合は必要なパラメータの個数も含めて）解はどのように与えれられるのかを統一的に取り扱う。

このように書くとまず (1) ～ (3) のどれに対応するかを判定して、(1)、(3) の場合は解を求めるように思えるが、実際は (1) ～ (3) の判定と、解を求めるプロセスは同時に行われる。

連立1次方程式

第3回目に方程式と行列の関係として

$$\left\{\begin{array}{ccc} ax+by & = & c \\ dx+ey & = & f \end{array}\right.$$

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

$$(A\ \mathbf{c})=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

を出したが、方程式を行列の積を使って書けば $A\mathbf{x}=\mathbf{c}$ と書ける。
一方で第8回目に見たように解を求めるには $(A\ \mathbf{c})$ を変形した方が便利である。
まず方程式に対して行列 A と $(A\ \mathbf{c})$ はよく出てくるので名前がついている。

連立 1 次方程式

定義　係数行列

連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ に対して、
A を係数行列、$(A\ \mathbf{c})$ を拡大係数行列と呼ぶ。

連立 1 次方程式

命題

行列 A が正則ならば連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ の解は
$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{c}$ ただ一つ。

この命題から、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ に対してまず A^{-1} を計算しようと思うが、これは手間がかかりすぎる。
実際には第 8 回目にやったように拡大係数行列 $(A\ \mathbf{c})$ を基本変形した方が良い。

連立１次方程式

第８回目にやったように拡大係数行列 $(A\ \mathbf{c})$ を基本変形した場合
$(A\ \mathbf{c}) \to \cdots \to (E\ \mathbf{c}')$
となったが、サイズの違いから、

$$(A\ \mathbf{c}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} E & \mathbf{c}' \\ O & \mathbf{c}'' \end{pmatrix}$$

$(A\ \mathbf{c}) \to \cdots \to (E\ \mathbf{a}'_{k+1} \cdots \mathbf{a}'_n\ \mathbf{c}')$
となる場合も考えられ、これらの中間的な

$$(A\ \mathbf{c}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} E\ \mathbf{a}'_{k+1} \cdots \mathbf{a}'_n & \mathbf{c}' \\ O & \mathbf{c}'' \end{pmatrix} \qquad \cdots\ ①$$

も考えられる。
さらに行列によっては E にはならないが、階数の計算でやったように、階段状になる場合もあり得る。
階段状になった場合の対応を後に回すことにして、上のパターンも ① に入ると思ってこの場合に連立１次方程式の分類の判別および解を与える。

連立 1 次方程式

命題

連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解に必要なパラメータの個数は
$\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n)$（未知数の数を n）として
$n - \mathrm{rank}\ A$

注意

この命題は未知数の数と方程式の数、パラメータの数の関係である。

連立1次方程式

命題 1

拡大係数行列が① のように基本変形された場合
$\mathbf{c}'' \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow$ 解なし

連立1次方程式

命題2

拡大係数行列が① のように基本変形されて
$\mathbf{c}'' = \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{a}'_{k+1} \cdots \mathbf{a}'_n$ の部分がない場合
$\Rightarrow$ 解はただ一つに決まり、解は
$\mathbf{x} = \mathbf{c}'$

注意

命題2 は
$(A\ \mathbf{c}) \to \cdots \to (E\ \mathbf{c}')$
$(A\ \mathbf{c}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} E & \mathbf{c}' \\ O & \mathbf{0} \end{pmatrix}$
の2パターンが考えられ、上の場合は第8回目にやった結果。
下の場合は、未知数の数よりも方程式の数の方が多かったが、本質的には未知数の数と同じ数の方程式しかなかったパターン。

連立1次方程式

命題3

拡大係数行列が① のように基本変形されて
$\mathbf{c}'' = \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{a}'_{k+1} \cdots \mathbf{a}'_n$ の部分がある場合（$k < n$ の場合）
$\Rightarrow$ 解を全て書くには $n-k$ 個のパラメータが必要で、解はパラメータを s_l $(k+1 \leq l \leq n)$ と置くと

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{c}}' + \sum_{l=k+1}^{n} s_l(-\tilde{\mathbf{a}}'_l + \mathbf{d}_l)$$

ただし

$$\tilde{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} \mathbf{c}' \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{a}}'_l = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_l \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{d}_l)_j = \delta_{lj}$$

($(\mathbf{d}_l)$ は第 l 成分だけ 1 他は 0 となるベクトル)

連立1次方程式

注意

命題3において解の与え方はいろいろあるが、その中で、

$x_{k+1} = s_{k+1}$, $x_{k+2} = s_{k+2}, \ldots, x_n = s_n$
となるものを無理やり書いたものと思える。

連立 1 次方程式

最後に階段状にはなるが E にはならないパターンに関しては例を挙げておく。

$$(A\ \mathbf{c}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

のように基本変形できた場合、一度方程式に書き直して（戻して）みる。対応する方程式は、$\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ として

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \\ 0 = c_3 \end{cases}$$

と書き直せる。

ここまで変形してあればそのまま計算することもできるが、次のように考え直して今までの命題 1〜3 を適用する。

$\tilde{\mathbf{x}} = {}^t(x_1, x_3, x_2)$ と未知数の順序を入れ替えてこの方程式を $A'\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{c}}$ の形に書き直してみれば、係数行列 A' 拡大係数行列 $(A'\ \tilde{\mathbf{c}})$ はそれぞれ

連立 1 次方程式

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A'\ \tilde{\mathbf{c}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

と書け、列基本変形のうち 2 列目と 3 列目を入れ替える操作をしたことに対応する。

この形であれば、命題 1〜3 を適用することができ、

∘ 命題 1 から $c_3 \neq 0$ ならば解なし

∘ 命題 3 から $c_3 = 0$ ならば s をパラメータとして

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

元の $\mathbf{x}$ に戻せば

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。

連立1次方程式

例えば

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=3 \\ 3x+y-z=a \end{cases}$$

を x, y, z を未知数、a をパラメータとして解く。

拡大係数行列を行基本変形していくと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[②-2①]{③-3①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & a-3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+2②]{①-②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}$$

この計算結果より

$a \neq 5$ ならば解なし

$a = 5$ ならばパラメータを s として

${}^t\mathbf{x} = {}^t(x, y, z) = (2, -1, 0) + s(1, -2, 1)$

連立１次方程式

問題

次の方程式を解け。ただし x, y, z, w が未知数、a はパラメータとする。

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2z = 3 \\ 2x - y = 2 \\ y + 3z = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + 2y + 3z + 4w = 5 \end{cases}$$