

基礎数理 B 第 9 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 3 ターム

逆行列

(m, n) 行列に行基本変形を繰り返していく。前回 1 次方程式を解いたときに行った Step j-1, Step j-2 を j に関して順に進めていけば、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & * \end{array} \right)$$

となりそうだが、

- 型の違い、
 - Step j-1 がうまくできない
 - Step j-2 がうまくできない
- ことがありえる。

逆行列

Step $j-1$ ができないときは Step $j-2$ もとばしてやると少なくとも階段状でかつ階段で降りているところでは 1 階段の下では 0 になるように変形できる。

定義

行列 A を行基本変形により階段状に書き換えた時に ${}^t\mathbf{0}$ （行ベクトルとしての $\mathbf{0}$ ベクトル）にならない行ベクトルの個数を階数、ランクと呼び、 $\text{rank } A$ と書く。また $\text{rank } \mathbf{O} = 0$ とする。

注意

階数の計算だけであれば、上三角行列になるように、計算を省略しても構わない。

逆行列

階数計算の例

$$\text{rank } A_7 = \text{rank} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{1}/5}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{2}-4\textcircled{1}}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{rank } A_{14} = \text{rank} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{1}/3}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{2}-\textcircled{1}}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix} \stackrel{3/4\textcircled{2}}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rank } A_{15} = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{1}/7}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{2}-9\textcircled{1}}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

逆行列

$$\text{rank } A_{71} = \text{rank} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{1}/4}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{2}-5\textcircled{1}}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -10 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{3}-8\textcircled{1}}{=}$$

$$\stackrel{-\textcircled{2}/5}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & -10 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{3}+10\textcircled{2}}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\textcircled{3}/3}{=} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

問題

次の行列の階数を求めよ。

A_{16} , A_{18} , A_{46} , A_{75}

逆行列

命題

(m, n) 行列 A に対して
 $\text{rank } A \leq m$ かつ $\text{rank } A \leq n$

命題

行列 A, B に対して
 $\text{rank } (AB) \leq \text{rank } A$ かつ $\text{rank } (AB) \leq \text{rank } B$

定理 3.2

n 次正方行列 A に対して
 A が正則 $\Leftrightarrow \text{rank } A = n$

逆行列

天下りの的に次の3つの正方行列を導入する

(1) 単位行列 E のうち $(i, i), (j, j)$ の2つの成分を0にし、かわりに $(i, j), (ji)$ の2つの成分を1にしたもの。

(2) 単位行列 E のうち (i, i) 成分を c にしたもの

(3) 単位行列 E のうち (i, j) 成分を c にしたもの

これらを行列 A に左からかけてみると結果として

(1) 第 i 行と第 j 行を取りかえる

(2) 第 i 行を c 倍する

(3) 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える

のように行基本変形の操作に対応している。

(列基本変形はこれらの行列を右からかけることに対応している。)

これらの (1), (2), (3) の操作それぞれに対して元に戻す操作を考えると、やはり基本変形の操作が対応している。

逆行列

これらの事実から

定理 3.1

(m, n) 行列 A に行基本変形を繰り返して行列 B になったとすると、ある m 次正則行列 P があって次のように書ける

$$PA = B$$

この定理 3.1 と Step j-1 Step j-2 として挙げた操作を見れば A の逆行列を求めるのに、 A から初めて Step j-1 Step j-2 として E までたどり着けばよいように思えるが、一方で、これだと肝心の A^{-1} が分からない。

これに対して行列の行列 (AE) から初めて (EP) になったとすると、この P は A の逆行列になっている。

また (AE) から初めて途中の j で Step j-1 ができない状況になった時には A の階数が行列のサイズより小さくなっている。

これらをまとめることで

逆行列

命題

$(AE) \rightarrow \text{Step 1-1, Step1-2, } \dots \rightarrow (EP)$

となれば $A^{-1} = P$

$(AE) \rightarrow \text{Step 1-1, Step1-2, } \dots \text{ Step } j-1$ ができない

A は正則でない

注意

多くの場合逆行列は

$(AE) \rightarrow \text{Step 1-1, Step1-2, } \dots \rightarrow (EP)$

の形で求める。

逆行列

実際に逆行列を計算してみる。

$$(A_{46}E) = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{1}/8} \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1 & 1/8 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\textcircled{2}-7\textcircled{1}} \\ \xrightarrow{\textcircled{3}-7\textcircled{1}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 25/4 & 2 & -7/8 & 1 & 0 \\ 0 & 9/4 & -3 & -7/8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4/25\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8/25 & -7/50 & 4/25 & 0 \\ 0 & 9/4 & -3 & -7/8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} - 1/4 \textcircled{2} \\ \textcircled{3} - 9/4 \textcircled{2} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 23/25 & 4/25 & -1/25 & 0 \\ 0 & 1 & 8/25 & -7/50 & 4/25 & 0 \\ 0 & 0 & -93/25 & -14/25 & -9/25 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-25/93 \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 23/25 & 4/25 & -1/25 & 0 \\ 0 & 1 & 8/25 & -7/50 & 4/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14/93 & 9/93 & -25/93 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} - 23/25 \textcircled{3} \\ \textcircled{2} - 8/25 \textcircled{3} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/93 & -12/93 & 23/93 \\ 0 & 1 & 0 & -35/186 & 12/93 & -8/93 \\ 0 & 0 & 1 & 14/93 & 9/93 & -25/93 \end{pmatrix}$$

$$\text{従って } A_{46}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/93 & -12/93 & 23/93 \\ -35/186 & 12/93 & -8/93 \\ 14/93 & 9/93 & -25/93 \end{pmatrix}$$

$$\text{もしくは } A_{46}^{-1} = \frac{1}{186} \begin{pmatrix} 4 & -24 & 46 \\ -35 & 24 & -16 \\ 28 & 18 & -50 \end{pmatrix}$$

注意

検算に関して

たとえどのような基本変形をしたかを書き込んでいても、この計算が正しいかを一つ一つ確認するのはかなり大変である。

一方で逆行列を計算している場合、出てきた結果の A^{-1} と A をかけてみれば、結果が、正しいか間違っているかだけは簡単に判断できる。

逆行列

問題

次の行列の逆行列を求めよ

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_{48}, \quad A_{80}$$