基礎数理 B 第 8 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 3 ターム

行列の基本変形

第 6 回に行列式の計算に出てきた基本変形のうち、特に行基本変形は

- 2 つの行を入れ替える
- ある行を定数倍する
- ある行に他の行の定数倍を加える

であったが、これらの操作は行列式の計算以外でも重要（基本的）である。

行列の基本変形

まず次の連立 1 次方程式を解いてみる。

$$\begin{cases} x+y=1 & \cdots ① \\ 2x-y=2 & \cdots ② \end{cases}$$

解き方は一通りではないが、

(1) y を消す。 ① + ② により $3x=3$

(2) この式を両辺 $1/3$ 倍する（3 で割る）ことにより $x=1$

(3) この結果を ① に代入して式変形をして $y=0$

答え $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

行列の基本変形

もう少し大変な連立 1 次方程式では

$$\begin{cases} x+y+z=1 & \cdots ① \\ 2x-y+z=2 & \cdots ② \\ 3x+2y-z=5 & \cdots ③ \end{cases}$$

同様に

(1) z を消す ② − ①, ③ + ① により

$$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ②' \\ 4x+3y=6 & \cdots ③' \end{cases}$$

(2) x を消す ③$'$ − 4②$'$ により $11y=2$

(3) 両辺 1/11 倍して（11 で割って） $y=2/11$

(4) ②' に代入して変形して $x=15/11$

(5) ① に x, y を代入して $z=-6/11$

答え $\begin{cases} x=15/11 \\ y=2/11 \\ z=-6/11 \end{cases}$

行列の基本変形

∘ どちらの方程式においても、変数を消す操作で、方程式の数が減っているように見えるが、代入の操作で復活させているので、実際には「書いていないだけ」
同じ操作を、変数 x, y, z を書かずに、係数だけ書き、行列として書き直してみる。

$$\begin{cases} x + y = 1 & \cdots ① \\ 2x - y = 2 & \cdots ② \end{cases}$$

のケース

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{②/3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①-②} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行列の基本変形

$$\begin{cases} x+y+z=1 & \cdots ① \\ 2x-y+z=2 & \cdots ② \\ 3x+2y-z=5 & \cdots ③ \end{cases}$$

のケース

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+①]{②-①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-4②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{③/11} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②+2③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 15/11 \\ 0 & 1 & 0 & 2/11 \end{pmatrix} \xrightarrow[①-③]{①-2②} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -6/11 \\ 1 & 0 & 0 & 15/11 \\ 0 & 1 & 0 & 2/11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①\leftrightarrow②\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 15/11 \\ 0 & 1 & 0 & 2/11 \\ 0 & 0 & 1 & -6/11 \end{pmatrix}$$

行列の基本変形

「代入して式変形をする」がある行に他の行の定数倍を加える。
「最後のまとめ」が行の交換
とする必要はあるが、順番に行基本変形を繰り返していると思える。

◦ 自然に「どんな連立 1 次方程式でもこの方法で解けるのか？」という疑問が出てくるが、結果として、解がない場合、解が複数ある場合（パラメータが必要な場合）でも対応できる。

◦ 上でやった操作は操作数がなるべく少なくなるようにうまく計算したが、一般的に使える方法ではない。（行列ごとにどのような操作をするかを変えなければいけない。）

◦ 操作数は増えるが、どのような行列でも統一的に扱える方法を取り扱う。

◦ 今回は、操作の手順が分かりやすいように解がただ 1 つに決まる場合を取り扱う。

先と同じ行列に対応する方程式で操作を見る。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Step 1-1. $(1,1)$ 成分を 1 にする。（行の入れ替え、行を定数倍する）

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

今回はすでに 1 になっているので操作はしない。

Step 1-2. $(i,1)$ 成分 $(i \neq 1)$ を 0 にする。（ある行に別の行の定数倍を足す。）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & -1 & 1 & 2 \\ \boxed{3} & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-3①]{②-2①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & -3 & -1 & 0 \\ \boxed{0} & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

行列の基本変形

Step 2-1. $(2,2)$ 成分を 1 にする。ただし第 1 列は変えない。（行の入れ替え、行を定数倍する）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-②/3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Step 2-2. $(i,2)$ 成分 $(i \neq 2)$ を 0 にする。（ある行に別の行の定数倍を足す。）

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+②]{①-②} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & -11/3 & 2 \end{pmatrix}$$

行列の基本変形

Step 3-1. $(3,3)$ 成分を 1 にする。ただし第 1,2 列は変えない。（行の入れ替え、行を定数倍する）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-11/3} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-11/3②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -6/11 \end{pmatrix}$$

Step 3-2. $(i,3)$ 成分 $(i \neq 3)$ を 0 にする。（ある行に別の行の定数倍を足す。）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{2/3} & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6/11 \end{pmatrix} \xrightarrow[②-1/3③]{①-2/3③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} & 15/11 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & 2/11 \\ 0 & 0 & 1 & -6/11 \end{pmatrix}$$

Final Step. 最終列（今回は第 4 列）が答え

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{15/11} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{2/11} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-6/11} \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x = 15/11 \\ y = 2/11 \\ z = -6/11 \end{cases}$$

行列の基本変形

注意

各ステップでやるべきことは同じだが、途中経過は人によって違っていても構わない。

注意

この一連の操作を掃き出し法、ガウスの掃き出し法、ガウスの消去法、ガウスジョルダンの掃き出し法などと呼ぶ。

行列の基本変形

問題

次の連立 1 次方程式を行列を使って解け。なお基本変形を行った場合は、省略記号で構わないので、どのような基本変形を行ったかを書いておくように。

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y = 2 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 4z = 1 \\ 8x + 3y + 8z = 3 \\ 3x + 8y + 5z = 9 \end{cases}$$