# 基礎数理 B 第 7 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 3 ターム

# 行列式の展開

前回に引き続き、行列式の性質を使って、$n \geq 4$ 以上の行列式の計算を $n = 1, 2, 3$ の計算へ持ち込む方法の 2 つ目を取り上げる。

# 行列式の展開

## 定理 2.9

$A, B$ を $n$ 次正方行列とすると
$\det(AB) = \det(BA) = \det A \det B$

# 行列式の展開

## 注意

$A, B$ が正方行列でない場合、右辺 $\det A \det B$ が意味を持たないが、例えば、

$$A = A_{36} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = A_{41} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ならば $AB = \begin{pmatrix} 50 & 96 \\ 13 & 30 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 42 & 40 & 72 \\ 14 & 15 & 25 \\ 7 & 25 & 23 \end{pmatrix}$

になり $\det(AB), \det(BA)$ は意味を持つ。
実際に計算してみると
$\det(AB) = 252, \det(BA) = 0$ と違う値になる。

# 行列式の展開

## 定義　小行列式、余因子

$A$ を $n$ 次正方行列とする。
$A$ の $i$ 行と $j$ 列を取り除いてできる $n-1$ 次正方行列の行列式を $A$ の $(i,j)$ 小行列式と呼び $D_{ij}$ と書く。
さらに $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ を $A$ の $(i,j)$ 余因子と呼ぶ。

## 注意

$D_{ij}$, $A_{ij}$ 共に行列に見えるがスカラーであることに注意する。

# 行列式の展開

実際に $B = A_{46} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ で計算してみると

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = -4$$

$$B_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = 35$$

$$B_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = -28$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 24$$

$$B_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = -24$$

$$B_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = -18$$

# 行列式の展開

$$B_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = -46$$

$$B_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = -16$$

$$B_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 50$$

と計算できる。

# 行列式の展開

## 定理 2.11　行列式の展開

$n$ 次正方行列 $A$ に対して $i$ によらず以下が成り立つ。

(1) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$　$i$ 行に関する展開

(2) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{ji}$　$i$ 列に関する展開

## 注意

定理 2.11 は次の定理 2.12 の $i = k$ のところを抜き出したものと思える。

# 行列式の展開

## 定義　$\delta$-関数

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

## 定理 2.12

$n$ 次正方行列 $A$ に対して以下が成り立つ。

(1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \delta_{ik} \det A$

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{jk} = \delta_{ik} \det A$

# 行列式の展開

$B = A_{46}$ に対して、既に余因子 $B_{ij}$ を計算してあるので、実際に行列式を計算してみる。
第 1 行に関して展開してみると、

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{j=1}^{3} b_{1j}B_{1j} = b_{11}B_{11} + b_{12}B_{12} + b_{13} + B_{13} \\ &= 8 \times (-4) + 2 \times 35 + 8 \times (-28) = -186\end{aligned}$$

同様に第 2 行に関して展開してみると、

$$\begin{aligned}\det B &= b_{21}B_{21} + b_{22}B_{22} + b_{23} + B_{23} \\ &= 7 \times 24 + 8 \times (-24) + 9 \times (-18) = -186\end{aligned}$$

# 行列式の展開

第 1 列に関して展開してみると、

$$\det B = \sum_{j=1}^{3} b_{j1} B_{j1} = b_{11} B_{11} + b_{21} B_{21} + b_{31} + B_{31}$$
$$= 8 \times (-4) + 7 \times 24 + 7 \times (-46) = -186$$

同様に第 2 列に関して展開してみると、

$$\det B = b_{12} B_{12} + b_{22} B_{22} + b_{32} + B_{32}$$
$$= 1 \times 35 + 8 \times (-24) + 4 \times (-16) = -186$$

と当然同じ値が出てくる。

# 行列式の展開

多くの場合、余因子を先に計算していることはないので、この計算のために必要な余因子だけを計算することになる。
3 次正方行列で、展開を使って計算することは、あまり勧められない。（結果的にサラスの公式と同じことをしていることになる。）
一方で 4 次以上の正方行列では展開を使って、行列のサイズを小さくすることができ、結果的にサラスの公式が使えるようになるので、便利ではある。

# 行列式の展開

さらにどの行、列を使うかは自由なので、次の例のように、0 が多く含まれる行または列を探して、使うと良い。

$$\det A_{82} = \det C = \det \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 6 \\ 9 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \times C_{11} + 9 \times (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} + 0 \times C_{31} + 0 \times C_{41}$$

このように $C_{11}$ のように書いた 3 つの余因子は計算する必要がない。

# 行列式の展開

さらに前回行った基本変形をうまく利用できればさらに効果的になる。

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 4 & 9 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

の計算を展開を使って計算する場合、どの行、どの列を用いても、3 つの余因子を計算しなければいけないが、

第 3 列から第 1 列を引く（$\boxed{3} - \boxed{1}$）基本変形を使えば、

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 4 & 9 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & -3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-3) \times (-1)^{2+3} \times \det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = 102$$

とかなり計算が楽になる。

# 行列式の展開

定理 2.12 から余因子をうまく使えば逆行列を求めることができる。

## 定義　余因子行列

$n$ 次正方行列 $A$ に対して、$A$ の $(i,j)$ 余因子を $(i,j)$ 成分とする行列を $\tilde{A}$ とし、${}^t\tilde{A}$ を余因子行列と呼ぶ。

## 注意

定理 2.12 をこの余因子行列を使って書き直せば
$A{}^t\tilde{A} = {}^t\tilde{A}A = \det AE$

# 行列式の展開

## 定理 2.13

(1) $n$ 次正方行列 $A$ に対して
$A$ が正則 $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$
(2) さらに $\det A \neq 0$ ならば
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\tilde{A}$$

## 注意

具体的な行列の逆行列を求めるとき、原理的には、余因子行列を使えば逆行列を求めることが可能であるが、計算量の問題から、基本変形を用いた方法を使うことが多い。
一方で、抽象的な話をするときには非常に強い道具になることが多い。

# 行列式の展開

## 問題

以下を求めよ。

$\det A_{48}$，$\det A_{83}$， ,$\det A_{83}^{-1}$，$\det(A_{82}A_{83})$