基礎数理 B 第 6 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 3 ターム

行列式の計算

前回行列式の定義を行い、$n = 1, 2, 3$ の時は定義通りに計算ができるようになった。
一方 $n \geq 4$ では定義通りに計算するのは大変である。
行列式の性質を使って、$n \geq 4$ 以上の行列式の計算を $n = 1, 2, 3$ の計算へ持ち込む方法が 2 通りある。（どちらを使うかは行列に依存し、計算しやすそうな方を使う。）
今回と次回で 1 通りずつ取り上げる。

行列式の計算

定理 2.5

n 次正方行列 A に対して
$\det A = \det {}^t\!A$

この定理 2.5 から行に関して成り立つ行列式の性質は転置して列に関して成り立つ行列式の性質と見直すことができ、逆に列に関して成り立つ性質は行に関して成り立つ性質とみなせる。
このため多くの定理がどちらか一方だけで書かれることが多いが、特に書きやすい（表記のしやすい）列に関して成り立つ性質として書かれることが多くなる。

行列式の計算

命題 （例題 2.1 2.2）

(1)

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(1)'

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

行列式の計算

命題 （例題 2.1 2.2）

(2) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & & & \boxed{O} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

(2)' $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ \boxed{O} & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

行列式の計算

この命題の (1) もしくは (1)' が使える状況になれば、n 次の正方行列の行列式を $n-1$ 次の正方行列の行列式の計算に持ち込むことができ、帰納的に計算のできる 3 次の行列の行列式の計算に持ち込むことができる。
以下 (1) もしくは (1)' の左辺の形にできるような計算方法、性質を与える。

行列式の計算

定理 2.6　交代性

n 次正方行列 $A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$ と $\sigma \in S_n$ に対して

(1) $\det(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n) = \operatorname{sgn}\sigma \det(\mathbf{a}_{\sigma(1)}\ \mathbf{a}_{\sigma(2)}\ \cdots\ \mathbf{a}_{\sigma(n)})$

(2) 特に $\sigma = (i, j)$ （i, j の交換） の場合

$\det(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_i \cdots \mathbf{a}_j\ \cdots\ \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_j \cdots \mathbf{a}_i\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$

(3) 2 つの列が等しいとき （$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ となる i, j が存在するとき）

$\det A = 0$

行列式の計算

定理 2.7　線形性

(1) $\det(\mathbf{a}_1 \ \cdots \ c\mathbf{a}_i \ \cdots \ \mathbf{a}_n) = c\det(\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_i \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$

(2) $\det(\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_i' + \mathbf{a}_i'' \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$

$= \det(\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_i' \ \cdots \ \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_i'' \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$

注意

$\det(cA) = c\det A$ と書きたくなるが、これは間違い。
実際は定理 2.7(1) を全ての列で使うことになり
$\det(cA) = c^n \det A$ （ただし A は n 次正方行列）

行列式の計算

定理 2.8

$$\det(\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j \ \cdots \mathbf{a}_j \ \cdots \ \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_i \ \cdots \mathbf{a}_j \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$$

行列式の計算

定義　基本変形

定理 2.6(2) 2 つの列を入れ替える
定理 2.7 ある列を定数倍する
定理 2.8 ある列に他の列の定数倍を加える
この 3 つの操作を、列基本変形、右基本変形と呼ぶ。
これらの操作を列と、行を入れ替えて
2 つの行を入れ替える
ある行を定数倍する
ある行に他の行の定数倍を加える
この 3 つの操作を、行基本変形、左基本変形と呼ぶ。
これらを合わせて基本変形と呼ぶ。

行列式の計算

命題で挙げた (1) もしくは (1)' の形

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \begin{matrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

にできれば n 次の行列の行列式は $n-1$ 次の行列の行列式の計算になる。

基本変形を繰り返せば、(定数に気を付けなければいけないが) どちらかの形に変形することは可能である。

行列式の計算

実際に 4 次の行列式で計算してみる。例えば教科書の例で

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

第 1 列と第 2 列の交換

$$= -\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

第 3 行に第 1 行の 3 倍を、第 4 行に第 1 行の 2 倍を加える。

$$= -\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & 2 \\ 0 & 9 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)' の形になったので

$$= \det\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 7 & 7 & 2 \\ 9 & 6 & -1 \end{pmatrix} = 23$$

（最後の計算は省略）

行列式の計算

どのような基本変形をしたかは必ずしも書く必要はないが、自分自身後で見直したり、計算ミスがないかをチェックするためにも書いておいた方が良い。
必ずしも一般的ではないが次のような省略記号のローカルルールを決めておく。
①,② などは第 1 行、第 2 行のように○で囲った場合行を表し、$\boxed{1}$,$\boxed{2}$ などは第 1 列、第 2 列のように□で囲った場合は列を表すことにする。
交換は $\leftrightarrow$、行、列の定数倍は c①, $c'\boxed{1}$ で、第 1 行に第 2 行の定数倍を加える場合は ① $+ c$② のように書くことにする。
今回の例では最初の変形で $\boxed{1} \leftrightarrow \boxed{2}$
次の変形で ③ $+ 3$①、 ④ $+ 2$① の 2 つの操作を行っている。
指示があった場合は、教科書のように等号の付近にこれらを書くか、式の後ろに書くように。

行列式の計算

問題

$\det A_{80}$，　$\det A_{81}$，　$\det A_{82}$ を求めよ。なお基本変形をした場合、省略記号を使っても構わないので、どのような基本変形をしたか、書いておくように。