基礎数理 B 第 4 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 3 ターム

特別な行列について

定義　転置行列

(m, n) 行列 A に対して転置行列 ${}^tA$ を (n, m) 行列で ${}^tA$ の (i, j) 成分を a_{ji} と定義する。
すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

定義　随伴行列

複素行列 A に対して随伴行列 A^* を
$A^* = {}^t\overline{A} = \overline{{}^tA}$
で定義する。

注意

${}^t\overline{A}$、 $\overline{{}^tA}$ は計算してみると、結果的に同じ行列になる。

特別な行列について

例えば

$$ {}^tA_1 = {}^t(3\ 6) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad {}^tA_{14} = {}^t\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} $$

$$ (A_14 + iA_{15})^* = \begin{pmatrix} 3 & 5+7i \\ 1 & 3+9i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5-7i & 3-9i \end{pmatrix} $$

問題

$(A_7 + iA_8)^* \quad (A21 + iA_{22})^*$ を求めよ。

特別な行列について

定理 1.9

(1) ${}^t({}^tA) = A$
(2) ${}^t(cA) = c\,{}^tA$
(3) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
(4) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

命題（問 13）

(1) $(A^*)^* = A$
(2) $(cA)^* = \overline{c}A^*$
(3) $(A+B)^* = A^* + B^*$
(4) $(AB)^* = B^*A^*$

特別な行列について

定理 1.10

行列の行列同士の掛け算があった場合、行列の行列にある小行列をスカラーと思って、計算してみて、その（形式的な）結果が数学的に定義できていれば実際に正しい。

次の 2 つの例が典型的

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ のとき

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_n$ を列ベクトルとして $B = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_n)$ とする。

$AB = A(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_n) = (A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ \cdots\ A\mathbf{b}_n)$

特別な行列について

定義　正則行列

正方行列 A に対して
$AX = XA = E$
となる正方行列 X が存在するとき A は正則行列と呼ぶ。

命題

$AX = XA = E$
を満たす X があればそれはただ一つ。

特別な行列について

定義　逆行列

正方行列 A に対して
$AX = XA = E$
を満たす正方行列 X を A の逆行列と呼び A^{-1} と書く。

命題（例 14）

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の場合
A が正則 $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$
さらにそのとき $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

特別な行列について

注意

数年前までは高校の課程で 2 次正方行列に関しては教えられていた。
このため 2 次正方行列の逆行列などは当たり前に知っていると思われている。

特別な行列について

例えば

$$A_{14}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -5/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$A_{15}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$ は $0 \times 9 - 0 \times 7 = 0$ より存在しない。

問題

A_{16}^{-1} A_{17}^{-1} を求めよ。

特別な行列について

定理 1.1

A, B を正則行列とするとき
(1) 逆行列 A^{-1} も正則で $(A^{-1})^{-1} = A$
(2) 転置行列 ${}^tA$ も正則で $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
(3) 行列の積 AB も正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

特別な行列について

問題

A_{18}^{-1} A_{19}^{-1} $(A_{18}+A_{19})^{-1}$ $(A_{18}A_{19})^{-1}$ $(A_{19}A_{20})^{-1}$ を求めよ。