基礎数理 B 第 3 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 3 ターム

行列の積

定義　行列の積

(l, m) 行列 $A = (a_{ij})$ と (m, n) 行列 $B = (b_{ij})$ に対して、行列 A と B の積 AB を次で定義する。
(1) AB は (l, n) 行列
(2) AB の (i, j) 成分 c_{ij} は

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}$$

これ以外の時（A の型の第 2 成分と B の型の第 1 成分が一致しないとき）積は定義しない。

行列の積

c_{ij} は下の箱で囲われた部分で計算され、A の方からは第 i 行ベクトル、B の方からは第 j 列ベクトルが出され、その内積で与えられる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ & \vdots & & \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{im}} \\ & \vdots & & \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & b_{1j} & & b_{1n} \\ b_{21} & & b_{2j} & & b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & & b_{mj} & & b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意

以下の例でみるように一見積が定義できそうにないものでも定義できることに注意する。

行列の積

例えば

$A_1A_1 = (3\ 6)(3\ 6)$ は定義できない。

$A_1A_7 = (3\ 6)\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = (39) \quad A_7A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}(3\ 6) = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$

$A_1A_{14} = (3\ 6)\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (15\ 33)$

$A_{14}A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}(3\ 6)$ は定義できない

$A_{14}A_7 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 17 \end{pmatrix}$

$A_{14}A_{16} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 43 \\ 17 & 21 \end{pmatrix}$

$A_{16}A_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 28 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}$

行列の積

問題

以下を求めよ。

$A_{71}A_{55}$,　$A_{71}A_{69}$,　$A_{71}A_{72}$,　$A_{80}A_{81}$

行列の積

方程式との対応

第 1 回目に例として方程式とその係数から成る行列

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by & = & c \\ dx+ey & = & f \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

を出したが、次のように行列 A と、列ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{c}$ を準備する。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

行列の行列として $(A\ \mathbf{c})$ は意味を持ち、上で挙げた行列と一致する。方程式を解くにはこの形の方が（結果的に）便利になる。

一方で方程式そのものは行列の積を使って $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ と書ける。

方程式の数と未知数の数が違う場合でも同じように書けている。

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by & = & c \\ dx+ey & = & f \\ gx+hy & = & i \end{array}\right., \quad A' = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{c}' = \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$$

と置けば方程式は $A'\mathbf{x} = \mathbf{c}'$ と書ける。

行列の積

注意

例でみたように $A_1 A_{14}$ は定義できたが、$A_{14} A_1$ は定義できない。
また $A_1 A_7$ と $A_7 A_1$ のように定義できても結果としてでてくる行列の型が違う場合もあり、
$A_{14} A_{16}$ と $A_{16} A_{14}$ のように型は同じでも、行列としては違う場合もあり、
実数や、複素数の掛け算とは完全に違うものである。

行列の積

定理 1.8

行列の積について次が成り立つ。
A, B, C は行列とし、c はスカラーとする。
(1) $(AB)C = A(BC)$
(2) $(A + B)C = AC + BC$
(3) $A(B + C) = AB + AC$
(4) $AO = O, \quad OA = O$
(5) $AE = EA = A$
(6) $(cA)B = A(cB) = c(AB)$

行列の積

注意

定理 1.8 において、行列 A, B, C の型は (1) から (6) で設定が異なることに注意する。
基本的には左辺、右辺の積や和が全て定義できるときに意味を持つ。
但し左辺、もしくは右辺の一方でも定義できた場合、両辺とも定義できる。
(4) の O は全て違う型の場合もある。
(5) の E は左辺、中央辺で違う型の場合もある。

行列の積

問題

$A_{80}A_{81}A_{82}$ を求めよ。