

基礎数理 A II 期末レポート

問 1 次の関数に対して以下の問いに答えよ.

$$f(x, y) = e^{ax-by} \cos(bx + ay), \quad \varphi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

(1) f, φ, ψ それぞれについて 2 回までの微分を全て求めよ.

(2) $\Delta f, \Delta \varphi, \Delta \psi$ を求めよ.

(3) $(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - (\psi_x^2 + \psi_y^2)$ を求めよ.

(4) $F(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ として $\Delta F(x, y)$ を求めよ.

(ヒント: (4) は具体的に計算しないで ΔF を f, φ, ψ の 2 回までの微分を使って書き, (2)(3) の結果を適用する.)

問 2 次の関数を $(1, 1)$ で 2 次までテイラー展開せよ. ただし剰余項は書かなくても良い.

$$(1) f(x, y) = (2 - 2x + x^2)e^{3x-3x^2+x^3-2y+y^2} \quad (2) g(x, y) = e^{-2+x+y} \sin(x - y),$$

問 3 次の関数は特異点を 9 個以上持つ. そのうち 9 個以上の特異点を求め, それぞれの点に関して, 極大, 極小, どちらでもないに分類せよ.

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$$

問 4 (1) D_1 を $(0, 0), (2, 2), (1, 3)$ を頂点とする三角形の内部および境界とする.

$$\iint_{D_1} \log \frac{x+1}{y+1} dx dy$$

を求めよ.

(2) $D_2 = \{(x, y); x^2 - 2 \leq y \leq x\}$ とする

$$\iint_{D_2} x^2 y dx dy$$

を求めよ.

(3) $0 < b < B$ とし, $D_3 = \{(x, y); b^2 \leq x^2 + y^2 \leq B^2, 2x + y \geq 0, 2x - y \geq 0\}$ とする

$$\iint_{D_3} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$$

を求めよ.

(4) $a, b > 0$ とし, $D_4 = \{(x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ とする

$$\iint_{D_4} x^2 + y^2 dx dy$$

を求めよ.

問 5 $n > 0$ として次の広義積分が収束する n の条件を求めよ. 収束する場合その値は具体的に求まるか? 具体的に求まる場合はその値を求めよ.

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{(1 + x^2 + 4xy + 5y^2)^n} dx dy$$

問6 次の整級数の収束半径を求めよ.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{5n+1} x^n, \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{5n+1} x^{2n}, \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sin n + 2} x^n, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{5}{n}\right)^n x^n$$

問7 N君は次の重積分の計算問題を以下のように解答した. これに対して100点満点で採点をし, 満点でない場合は添削をせよ.

$$\iint_D \frac{1}{(1+4x^2+y^2)^2} dx dy, \quad D = \{(x, y); (4x^2+y^2)^2 \leq 4x^2-y^2, \ x \geq 0\}$$

まず変数変換 $u = 2x, v = y$ とすることで $u^2 = 4x^2, v^2 = y^2$ だから D に対応する領域は

$$E = \{(x, y); (u^2 + v^2)^2 \leq u^2 - v^2, \ u \geq 0\}$$

と書き表せ, ヤコビアンが $J = 2$ となる. 従って求める積分は

$$2 \iint_E \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} du dv, \quad E = \{(u, v); (u^2 + v^2)^2 \leq u^2 - v^2, \ u \geq 0\}$$

と書き直せる. さらに極座標変換 $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$ とすると $u^2 + v^2 = r^2$ になり E を表す不等式が

$$r^4 \leq r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = r^2 \cos 2\theta$$

と書き表される. また $u \geq 0$ の条件もあるので $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ と取ることにする.

従って E に対応する領域は

$$F = \{(r, \theta), r \leq \sqrt{\cos 2\theta}, \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

ヤコビアンが $J = r$ なので求める積分は

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{(1+4x^2+y^2)^2} dx dy &= 2 \iint_E \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} du dv \\ &= 2 \iint_F \frac{r}{(1+r^2)^2} dr d\theta \\ &= 2 \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r}{(1+r^2)^2} dr d\theta \\ &= 2 \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \left[-\frac{1}{1+r^2} \right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \frac{1}{1+\cos 2\theta} d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \frac{1}{2\cos^2 \theta} d\theta = 2 \left[\theta - \frac{1}{2} \tan \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\infty \end{aligned}$$

問8 熱力学で出てくるエントロピーの一般化を行う。(ただし符号が逆転している)

確率に対応して $\{p_i\}_{i=1}^N, p_i > 0, \sum_{i=1}^N p_i = 1$ が与えられている時に相対エントロピー $H(q|p)$ を同様に、全ての確率に対応する $\{q_i\}_{i=1}^N, q_i \geq 0, \sum_{i=1}^N q_i = 1$ に対して

$$H(q|p) = \sum_{i=1}^N q_i \log \frac{q_i}{p_i}$$

と定義する。ただし $q_i = 0$ となる場合には $0 \log 0 = 0$ として和を取るものとする。

このとき「 $H(q|p) \geq 0$ かつ $H(p|p) = 0$ でありさらに $H(q|p) = 0$ を満たす q は p のみである」ことを次の問いに従って示せ。

(注意：確率論の知識を使う別証明もあるが、ラグランジュの乗数法の応用例として解くことを優先する。)

(1) $H(p|p)$ を計算せよ。

H は $\sum_{i=1}^N q_i = 1$ を満たすような確率だけで定義したが、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ と N 変数関数として $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$) として

$$H(x) = \sum_{i=1}^N x_i \log \frac{x_i}{p_i}$$

と定義して $\sum_{i=1}^N x_i = 1$ と制限を付けているものと思えるのでラグランジュの乗数法を適用するために

$$G(x) = \sum_{i=1}^N x_i$$

と定義する。

(2) x の第 i 成分 x_i に関する H, G の偏微分 H_{x_i}, G_{x_i} を計算せよ。

授業や、教科書では2変数版のラグランジュの乗数法が書かれているが、 N 変数版は単純に拡張され $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ として、条件 $g(x) = 0$ の下で $z = f(x)$ が $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ で極値を取るならば、以下のいずれかを満たす

(i) $g_{x_1}(a) = g_{x_2}(a) = \dots = g_{x_N}(a) = 0$

(ii) $(f_{x_1}(a), f_{x_2}(a), \dots, f_{x_N}(a)) = \lambda(g_{x_1}(a), g_{x_2}(a), \dots, g_{x_N}(a))$ を満たす λ が存在する。

(3) この N 変数版のラグランジュの乗数法を用いて $G(x) = 1$ の下で $z = H(x)$ が極値を取るための条件を求めよ。

(4) (3) の結果を用いて「 $H(q|p) \geq 0$ かつ $H(p|p) = 0$ でありさらに $H(q|p) = 0$ を満たす q は p のみである」を証明せよ。