基礎数理 AII 第 12 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 4 ターム

多重積分、重積分の応用

初回に話したように、2 変数関数の積分が分かれば、3 変数以上の関数の積分も分かる。また、なるべく予想しやすいように話をしてきたが、実際にいくつか例を挙げてみる。
積分の定義自体は 1 変数から 2 変数への拡張と同じように考えられる。実際の計算は累次積分、変数変換が挙げられるが、こちらも基本的には今までの話から同じように考えられる。一方で、例えば 3 次元の極座標変換のように、一度は計算をしておいた方が良い例は多い。

多重積分、重積分の応用

累次積分は設定を少し変化させる。

定理 11　累次積分

$D = \{(x, y, z);\ (x, y) \in E,\ \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\}$ ならば

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iint_E \Big(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz\Big)dxdy$$

系

$D = \{(x, y, z);\ a \le x \le b,\ \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x),\ \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\}$ ならば

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz$$
$$= \int_a^b \Big(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \Big(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz\Big)dy\Big)dx$$

多重積分、重積分の応用

例

$D=\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2\le a^2\}$ とすると、これは

$D=\{(x,y,z);\ -a\le x\le a,\ -\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2},$

$-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\le z\le\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\}$ と書けるので

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\int_{-a}^{a}\Big(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\Big(\int_{-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}f(x,y,z)dz\Big)dy\Big)dx$$

特に $f(x,y,z)=1$ ならば D の体積になり

$$I=\int_{-a}^{a}\Big(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\Big(\int_{-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}1dz\Big)dy\Big)dx$$

$$=\int_{-a}^{a}\Big(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}2\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}dy\Big)dx$$

多重積分、重積分の応用

ここで $A=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=\sqrt{a^2-x^2}\sin t=A\sin t$ とすると積分範囲は $-\pi/2\le t\le\pi/2$, $dy=A\cos t dt$ と変換されるので

$$\int_{-A}^{A}2\sqrt{A^2-y^2}dy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2A\sqrt{1-\sin^2 t}A\cos t dt$$

$$=2A^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t dt=\pi A^2$$

I の計算に戻ると

$$I=\int_{-a}^{a}\pi(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi a^3$$

になる。

多重積分、重積分の応用

変数変換はヤコビアン J に注意すれば基本的に同じ

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

を使って変数変換するとき 2 変数関数の時と同様に行列式を用いてヤコビアン J を

$$J = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$

で定義する。

多重積分、重積分の応用

定理 12

(u, v, w) 空間の領域 E を (x, y, z) 空間の D へ写す写像が 1 対 1 で、$J \neq 0$ とする。このとき

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz$$

$$= \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))|J|dudvdw$$

例 極座標

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{ただし} \quad \begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{ととる。}$$

このときヤコビアンを計算すると

$$J = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta\{(\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi) \\ \quad - (-\cos^2\theta\sin^2\varphi - \sin^2\theta\cos^2\varphi)\}$$

$$= r^2\sin\theta$$

多重積分、重積分の応用

従って (x,y,z) での領域 D と (r,θ,φ) での領域 E とが対応していれば

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$
$$= \iiint_E f(x(r,\theta,\varphi),y(r,\theta,\varphi),z(r,\theta,\varphi))r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

特に $f(x,y,z)=1,\ D=\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2\le a^2\}$ とすると、対応する領域は

$E=\{(r,\theta,\varphi);\ 0\le r\le a,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$ になるので

$$\iiint_D 1dxdydz = \iiint_E r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$
$$= \int_0^a r^2dr\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{3}a^3$$

多重積分、重積分の応用

曲面の面積のうち特に曲面が $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ と表されるとき以下のように定義する。

定理 13 曲面積

関数 $f(x, y)$ が D 上 C^1 ならば曲面 $f(x, y)$ は曲面積
$$S = \iint_D \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1}dxdy$$
を持つ。

例

$f(x,y)=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)},\ \ D=\{(x,y);\ x^2+y^2\le a^2\}$

の曲面積を計算する。

$f_x=-x(a^2-(x^2+y^2))^{-1/2},\quad f_y=-y(a^2-(x^2+y^2))^{-1/2}$ より

$$\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}=\sqrt{\frac{a^2}{a^2-(x^2+y^2)}}$$

になるので曲面積は

$$S=\iint_D\sqrt{fx^2+f_y^2+1}dxdy=\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}dxdy$$

極座標変換 $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$ とすると対応する領域は

$E=\{0\le r\le a,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$, ヤコビアンが $J=r$ になり

$$S=\iint_E\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdrd\theta=2\pi a^2$$

多重積分、重積分の応用

問題

$f(x,y) = x^2 - y^2$, $D = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$
で表される曲面の曲面積を求めよ。