基礎数理 AII 第 11 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 4 ターム

広義積分

1 変数関数の積分でも、(1) 被積分関数が発散する場合、(2) 積分区間が有界でない場合に、広義積分を定義した。2 変数関数の積分でも同様に広義積分を定義するが、積分領域について気にする必要がある。

定義 領域の近似列

$D_1, D_2, \dots$ は有界閉集合で

(1) $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \dots \subset D$

(2) $K \subset D$ を満たす任意の有界閉集合に対して $K \subset D_n$ となる n が存在する。

このとき $\{D_n\}$ を D の近似列と呼ぶ。

例

$\mathbf{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ に対して

$$D_n = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

$$E_n = \{(x, y); |x| \leq n, |y| \leq n\}$$

はともに近似列になる。

広義積分

定義 広義積分

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

が D の近似列 $\{D_n\}$ によらずに一定の値に収束すれば $f(x, y)$ は D 上広義可積分で

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

と書く。また広義積分が収束するという。

この定義は確実な定義にはなっているが、一方で次の例のように、実際に近似列の取り方によって、違う値に収束するものがある。

広義積分

例

$D = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0\}$ として

$$\iint_D \frac{x-y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy$$

は収束しない。

領域 $[0, N] \times [0, M]$ で累次積分をしてみると

$$\begin{aligned} & \iint_{[0, N] \times [0, M]} \frac{x-y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy \\ &= \int_0^M \left(\int_0^N \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx \right) dy \\ & - \int_0^N \left(\int_0^M \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dy \right) dx \end{aligned}$$

と書けるが、これは計算でき、

広義積分

$$\begin{aligned} & \int_0^M \left(\int_0^N \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx \right) dy \\ &= \int_0^M \left[-(1+x^2+y^2)^{-1/2} \right]_{x=0}^N dy \\ &= \int_0^M \left((1+y^2)^{-1/2} - (1+N^2+y^2)^{-1/2} \right) dy \\ &= \left[\log |y + \sqrt{y^2 + 1}| - \log |y + \sqrt{y^2 + 1 + N^2}| \right]_0^M \\ &= \log(M + \sqrt{M^2 + 1}) + \log(\sqrt{N^2 + 1}) - \log(M + \sqrt{M^2 + N^2 + 1}) \\ & \text{になり、第2項も対称性から同様な結果になることで} \\ & \iint_{[0,M] \times [0,M]} \frac{x-y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy \\ &= \log \frac{(M + \sqrt{M^2 + 1})(\sqrt{N^2 + 1})(N + \sqrt{N^2 + M^2 + 1})}{(N + \sqrt{N^2 + 1})(\sqrt{M^2 + 1})(M + \sqrt{N^2 + M^2 + 1})} \\ & \text{になる。} \end{aligned}$$

広義積分

この結果からパラメータ $\alpha > 0$ として近似列 $\{D_{\alpha,n}\}$ を $D_{\alpha,n} = [0, N] \times [0, \alpha N]$ とすると先の計算結果より

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{[0, N] \times [0, \alpha N]} \frac{x-y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1/N^2})(\sqrt{1 + 1/N^2})(1 + \sqrt{1 + \alpha^2 + 1/N^2})}{(1 + \sqrt{1 + 1/N^2})(\sqrt{\alpha^2 + 1/N^2})(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2 + 1/N^2})} \\ &= \log \frac{(2\alpha)(1)(1 + \sqrt{1 + \alpha^2})}{(2)(\alpha)(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2})} = \log \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}} \end{aligned}$$

になり α により $-\log 2$ から $\log 2$ の値をとる。

広義積分

2変数関数の広義積分でも、収束するための十分条件が存在する。

補題

$f(x, y) \geq 0$ ならば ($+\infty$ に発散することも込めて)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

は近似列 $\{D_n\}$ の取り方によらない。

定義

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} |f(x, y)| dx dy < \infty$$

のとき広義積分が絶対収束するという。

広義積分

定理

関数 $f(x, y)$ の D 上の広義積分が絶対収束すれば収束する。

補題

D 上 $|f(x, y)| \leq g(x, y)$ かつ

$$\iint_D g(x, y) dx dy$$

が収束すれば $f(x, y)$ の広義積分も絶対収束する。

広義積分

例

e^{-x^2} の原始関数は存在しないため、その定積分も計算できないが、特定の積分区間では、2変数関数の広義積分を使うことで計算可能になる。

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ の計算をするのに

$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} = e^{-x^2} e^{-y^2}$ として、 $\mathbf{R}^2$ の2つの近似列を取る。

$$D_n = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

$$E_n = \{(x, y); |x| \leq n, |y| \leq n\}$$

まず E_n で計算してみると、累次積分が可能で

$$\iint_{D_n} f(x, y) dx dy = \int_{-n}^n \int_{-n}^n e^{-x^2 - y^2} dx dy = \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2$$

この積分値は (この形では) 分からないが $n \rightarrow \infty$ で収束することは分かり、

$$\iint_{D_n} f(x, y) dx dy \rightarrow \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。

広義積分

一方で D_n で計算してみるが、極座標変換を行う。

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とすると D_n に対応した領域は

$F_n = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq n, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ になりヤコビアンは $J = r$ になる。従って

$$\begin{aligned}\iint_{E_n} f(x, y) dx dy &= \int_0^n \left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^n r e^{-r^2} dr = \pi \left[-e^{-r^2} \right]_0^n = \pi(1 - e^{-n^2})\end{aligned}$$

と計算でき $n \rightarrow \infty$ で π に収束する。

広義積分の定義から、広義積分は収束すれば近似列の取り方によらないため

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \text{ すなわち } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

と計算できる。

問題

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+2xy+5y^2)} dx dy$$

を求めよ。なお近似列に関しては省略して構わない。

ヒント： $u = ax + by$, $v = cy$ かつ $u^2 + v^2 = x^2 + 2xy + 5y^2$ になるように変数変換してみる。