

基礎数理 AII 第 10 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 4 ターム

変数変換

1 変数関数の積分の変数変換

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

に対応する 2 変数関数の積分の変数変換を取り扱う。

変数変換

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

と変数変換するとき

定義 ヤコビアン

φ, ψ が共に C^1 級るとき

$$J = \det \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix} = \varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u$$

と定義しヤコビアンと呼ぶ。

注意

J は u, v の関数であることに注意する。

変数変換

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) = au + bv \\ y = \psi(u, v) = cu + dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

であるが、このとき $J = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ であり、

図形的には2つのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ から作られる平行四辺形の面積と $|J|$ が一致する。

論理に少し飛躍はあるが、重積分の定義が小さな直方体に分割して、底面積に高さをかけて直方体の体積を出していたため、その底面の長方形を平行四辺形に変更したと思えば、この面積の比を表す $|J|$ が変数変換の補正項になりそうである。

実際に次のような定理が成り立つ。

定理 9

u, v 平面から x, y 平面への写像

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

が $E \rightarrow D$ かつ 1 対 1 で、 E 上 $J \neq 0$ とする。

このとき D 上の連続関数 $f(x, y)$ に対して

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| du dv \text{ である。}$$

注意

実際に変数変換をして積分を計算するには以下を行う

- (1) (計算がうまくできる) 変数変換 φ, ψ の組を見つける
- (2) D に対応した E を決める
- (3) $|J|$ の計算

注意

- (1) 変数変換 φ, ψ の組を見つける指針として、
 - (i) 関数の形から決める
 - (ii) 領域 E から決めるの2パターンが主流である。

変数変換

例

$D = \{(x, y); -1 \leq x + 2y \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1\}$ に対して

$$\iint_D (x - y)^2 dx dy$$

を計算するのに、累次積分で計算することも可能であるが、 D の形状から、

$$\begin{cases} u = x + 2y \\ v = x - y \end{cases}$$

となるような変数変換をとれば

$$E = \{(u, v); -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$$

になる。逆算して

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) = \frac{1}{3}(u + 2v) \\ y = \psi(u, v) = \frac{1}{3}(u - v) \end{cases}$$

になるので

変数変換

$$J = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}$$

従って

$$\iint_D (x-y)^2 dx dy = \iint_E v^2 |J| du dv = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 v^2 dv \right) du = \frac{4}{9}$$

変数変換

$D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ として

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

を計算する。これも頑張れば累次積分で計算できるが、かなり大変。

極座標変換

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

とすると対応する領域は

$$E = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

となり、ヤコビアンを計算すると

$$\begin{aligned} J &= \det \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy &= \iint_E \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^a = \frac{\pi}{6} a^3\end{aligned}$$

問題

次の重積分を計算せよ

(1) $D_1 = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ として

$$\iint_{D_1} \cos(x + y) \sin(x - y) dx dy$$

(2) $D_2 = \{(x, y); b^2 \leq x^2 + y^2 \leq B^2, x + y \geq 0, x - y \geq 0\}$ として

$$\iint_{D_2} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$$