

基礎数理 AII 第 9 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 4 ターム

累次積分

前回積分領域が長方形の場合、重積分は1変数関数を2回積分すれば計算できることが分かった。

一方で多くの場合積分領域は長方形では表されず、

$$D = \{(x, y); a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

のような形で境界を表す関数を使って表される。

このような場合でも重積分の定義を考えれば、1変数関数の2回の積分に書き換えられることを見る。

累次積分

領域 D は

$$D = \{(x, y); a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

とするが $c \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq d$ とする。

この仮定から長方形 $A = [a, b] \times [c, d]$ ととれば $D \subset A$ であり、 D 上で定義された関数 $f(x, y)$ の積分は

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

として

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_A \tilde{f}(x, y) dx dy$$

と定義した。

A は長方形であるので1変数関数の積分を2回使って書けるが、特に先に y について積分する形で書き直してみる。

累次積分

$$\iint_A \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right) dx$$

x を止める毎に括弧の中を $c \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq d$ を使って3つの積分に分けると

$$\begin{aligned} & \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \\ &= \int_c^{\varphi_1(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^d \tilde{f}(x, y) dy \end{aligned}$$

と書けるが第1,3項の y の範囲では $\tilde{f}(x, y) = 0$ になるため、積分も0になり、結果的に第2項だけが残ることになる。

さらに第2項の y の範囲では $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$ になる。このことから

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

と書けることが分かる。

累次積分

境界が x の関数で書ける場合を考えたが、 y の関数で書ける場合も同様に

$$D = \{(x, y); c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

ただし $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ の場合は

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

と書ける。

これらをまとめて次の定理とする。

定理 7

(1) $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ とし、

$D = \{(x, y); a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ とする。このとき

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

(2) $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ とし、

$D = \{(x, y); c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ とする。このとき

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

累次積分

例

$D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ として

$$\begin{aligned}\iint_D xy^2 dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{6} \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} (-2x) dx \\ &= -\frac{1}{6} \left[\frac{2}{5} (1-x^2)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{1}{15}\end{aligned}$$

累次積分

$D = \{(x, y); y^2 \leq x \leq y + 2\}$ とする。

このとき $D = \{(x, y); -1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y + 2\}$ と書き直せるので

$$\begin{aligned}\iint_D y dy dx &= \int_{-1}^2 \left(\int_{y^2}^{y+2} y dx \right) dy = \int_{-1}^2 y^2 + 2y - y^3 dy \\ &= \left[-\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3 + y^2 \right]_{-1}^2 = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

定理 8

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y); a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y); c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \end{aligned}$$

と2通りで書き表される場合

$$\begin{aligned} &\iint_D f(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

である。

累次積分

例

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_{2y/\pi}^1 \cos \frac{y}{x} dx \right) dy$$

とすると $\int \cos \frac{c}{x} dx$ 計算できない。

一方で積分領域は

$$D = \{(x, y); 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \frac{2y}{\pi} \leq x \leq 1\}$$
$$= \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}x\}$$

と2通りに書けるので、積分の順序交換をして

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi x/2} \cos \frac{y}{x} dy \right) dx = \int_0^1 \left[x \sin \frac{y}{x} \right]_{y=0}^{\pi x/2} dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

と全体としては計算可能である。

問題

次の重積分を計算せよ

(1) D_1 を $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$ を頂点とする三角形の内部とするとき

$$\iint_{D_1} xy \, dx dy$$

(2) $D_2 = \{(x,y); x^2 - 2 \leq y \leq x\}$ とするとき

$$\iint_{D_2} xy \, dx dy$$

$$(3) \int_0^1 \left(\int_{y^{1/2}}^{y^{1/3}} \exp \frac{y}{x} dx \right) dy$$