基礎数理 AII 第 2 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 4 ターム

偏微分、偏導関数

1 変数関数の微分に対応するものとして偏微分を導入する。

定義 偏微分

関数 $f(x, y)$ に対して

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

が存在したら関数 $f(x, y)$ は (a, b) で (x) に対して偏微分可能で、この極限値を (a, b) における x についての偏微分係数と呼ぶ。

同様に

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

が存在したら関数 $f(x, y)$ は (a, b) で (y) に対して偏微分可能で、この極限値を (a, b) における y についての偏微分係数と呼ぶ。

偏微分、偏導関数

定義 偏導関数

ある領域 D の全ての点で関数 $f(x, y)$ が (x に対して) 偏微分可能であればこの偏微分係数を値とする関数を偏導関数と呼び、

$$f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} f \text{ と書く。}$$

変数も加えて書けば $f_x(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ となる。

同様に y に関する偏導関数は

$$f_y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f \text{ と書く。}$$

注意

記号 ∂ は d を丸めて書いたものである。

注意

偏微分の定義から、偏微分は1つの変数(例えば x)に着目して、他の変数(y)は定数、もしくはパラメータと思って1変数関数の微分を行ったものと考えてよい。

例

$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ (a はパラメータ) に対して

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3ay \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 3ax$$

$g(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ に対して

$$g_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad g_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

偏微分、偏導関数

定義 C^1 関数

偏導関数 f_x, f_y が共に連続な関数を C^1 関数、 C^1 級関数と呼ぶ。

先の注意のように偏微分は1変数関数の微分に対応するので、多くの性質を受け継ぐが、多変数関数独特の性質もある。

注意

1変数関数の場合微分可能な関数は連続関数であったが、2変数関数として不連続でも x, y 両方について偏微分可能な関数が存在する。

例えば $\frac{xy}{x^2 + y^2}$

偏微分、偏導関数

1 変数関数の 2 回微分、高次導関数に対応して、2 回偏微分、高次偏導関数を定義する。

定義 2 回偏微分

偏導関数 f_x が偏微分可能な場合 2 回偏微分可能と呼び $(f_x)_x$ を省略して f_{xx} と書く。

また同様に $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f$ 等と書き、2 次偏導関数と呼ぶ。

注意

1 変数関数の場合と比較して大きく違う点として、上の定義では f_x を x で偏微分したが、 y で偏微分することもできる。このとき記号としては

$(f_x)_y = f_{xy}$ と書く。

一方 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$ と書く。

注意

2変数関数の場合に2次偏導関数を全て考えると、1回目、2回目にそれぞれ x, y のどちらかで微分するので、計4通り考えられ、 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ である。

例

$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ (a はパラメータ) に対して

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3ay \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 3ax$$

$g(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ に対して

$$g_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad g_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

であったので、これらの2次偏導関数を計算してみる。

偏微分、偏導関数

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - 3ay) = 6x$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 - 3ay) = -3a$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (3y^2 - 3ax) = -3a$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (3y^2 - 3ax) = 6y$$

$$g_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$g_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$g_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$g_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

偏微分、偏導関数

定義 C^2 関数

2次偏導関数 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ が全て連続な関数を C^2 関数、 C^2 級関数と呼ぶ。

定義 n 回偏微分

2回偏微分が定義できると、後は帰納的に3回、4回、 $\dots$ n 回偏微分が定義でき、 n 次偏導関数、 C^n 関数、 C^n 級関数も同様に定義できる。

定義 Δ

2 変数関数 $f(x, y)$ に対して

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$$

3 変数関数 $f(x, y, z)$ に対しては

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

と定義し、 Δ をラプラシアンと呼ぶ。

物理現象を表すのによく表れ

$\Delta f = 0$ を満たす関数 f を調和関数と呼ぶ。

定理 6

$f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$ が点 (a, b) で連続ならば $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ である。

問題

次の関数の2回までの偏導関数を全て求めよ。

$$f(x, y) = x^2y^2 + 3x + 4y, \quad g(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$$