基礎数理 AII 第 1 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

第 4 ターム

はじめに

授業に関して

毎回、資料をホームページ上
http://www.eng.niigata-u.ac.jp/~nagahata//2021/lecture-2020-a2.html
に挙げていきます。
教科書
微分積分概論　越昭三監修　高橋泰嗣・加藤幹夫　共著　サイエンス社（前期に基礎数理 AI で使ったものと同じものです。）
ISBN 978-4-7819-1329-2
をよく読みながら、資料を読んで、「問題」に解答してください。
また同時に該当する時間（火金 1 限）には zoom による授業を行います。
zoom の案内なども含めて、学務情報システムの「連絡通知」を通して行いますので、他の授業も込めて、よく確認するようにしてください。

はじめに

成績に関して

可能であれば、試験を行いその結果を基に成績を付ける予定でしたが、コロナの関係で、試験を行うことはほぼ不可能です。
シラバスにあるようにレポートで成績を付けます。
このレポートは 2 種類あります。
まず、最終回までに「期末レポート」を出題します。
これに加えて毎回、資料にある「問題」をレポートとして提出してください。
「期末レポート」の締め切りは出題日にお知らせします。
毎回のレポートの締め切りは基本的に授業の 1 週間後までとします。
なお病気などの特別な事情で締め切りに間に合わない場合は、メールで問い合わせをしてください。事情に応じて締め切り日等を変更します。

はじめに

レポートに関して

レポートは学務情報システムを使って提出してください。
レポートには数式などが入ることが多くなります。こちらとして想定している提出方法は次の 2 通りです。
(1) 手書きでレポートを作成して、スキャンもしくは写真を撮って提出する。基本的に pdf ファイルで提出してください。
(2) tex などのワープロソフトでレポートを作成、提出する。この場合は必ず pdf ファイルに変換してから送ってください。
手書きで写真の場合、作った本人は認識できても、こちらからは認識できない可能性もあります。そのため、手書きのレポートは捨てずに取っておいてください。必要であれば、それらを最後にまとめて郵送してもらうことも検討します。

はじめに

レポートに関して

◦ どの回のレポートかを表現するのには、回数、授業日、締め切り日などいくつかありますが、皆さんがバラバラに使うとこちらが混乱しますので、基本的にスライドの 1 枚目（各ページの右下にも同じ数が出ます）に書いてある第 n 回目を使用してください。
◦ 第 1 タームに他の授業で行った結果を見ると、手書きで書いたレポートをスキャンして送ってくれるのが一番見やすいです。
特に（プリンターの複合機なども含めて）スキャナーがある場合は、それを使うのが一番見やすいです。
◦ ワープロなどは慣れていないと数式を書くのは大変です。読みやすいと思ってワープロを使ったつもりが逆に読みづらいものになっていることが多くあります。
◦ 各プログラムで、pdf に変換する方法などが送られていますが、その方法を使っても その他の方法を使っても構いません。
最悪の場合、画像ファイルのまま送ってくれても構いません。

はじめに

その他

授業中 (zoom 中) に通信状況が悪くなって、よく聞こえなくなり、分からなくなることもあるかもしれません。基本的には、教科書と、資料をよく読めば分かるように準備していますが、それでも分からない場合は、

nagahata@eng.niigata-u.ac.jp

宛に、質問を送ってください。

質問は、メールの本文に書けるならばそれで構いませんが、数式が必要であれば、レポートと同様にワープロソフトや、写真などをうまく使ってください。

こちらの操作ミスを避けるため、質問でファイルを送る場合は必ず添付ファイルにしてください。(外部のクラウドサービス等を使わないでください。)

どこが分からないかをよく考えて、送ってくれないと、こちらとしては回答できないこともあります。

はじめに

その他

基礎数理 AI までは高校までの数学（特に数 3）の延長で、何とかなる部分もありますが、基礎数理 AII は完全に新しい分野と思うべきです。多変数関数の微分積分学ですので、1 変数関数の微分積分学と似ているところもありますが、やはり新しい分野だと思う方が自然です。
教科書や資料を読んでいると、簡単そうですぐにできそうな感じがしますが、実際に問題を解かないと、何も手が出ません。教科書の例題、問題、練習問題などを解くことを勧めます。実際に自分で手を動かすことが一番重要です。

2 変数関数、極限、連続

基礎数理 AI では主に 1 変数関 $f(x)$ の微分積分を取り扱ってきた。基礎数理 AII では主に 2 変数関数 $f(x, y)$ の微分積分を取り扱う。実際に取り扱いたいのは多変数関数
$f(x, y), f(x, y, z), \dots, f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の微分積分である。我々は 3 次元空間中にいるので 3 変数関数 $f(x, y, z)$ もしくは時間も加えて 4 変数関数 $f(t, x, y, z)$ を扱えれば十分と思うかもしれない。しかし実際には「2 個の質点の位置」を記述しようとしたら、それぞれの質点に対して 3 個ずつの変数を必要とし計 6 個の変数、「n 個の質点の位置」を記述しようとしたら、$3n$ 個の変数を必要とするので、多変数関数に関する微積分が必要になる。一方で、微分積分を考えるにあたって、1 変数関数の知識だけで 2 変数関数の微分積分を考えるには非常に大きなギャップがあり、少なくない時間の授業を必要とする。一方で一度 2 変数関数の微分積分を理解すれば、その知識だけで、3 変数関数だけでなく多変数関数の微分積分学を理解することは容易である。

2 変数関数、極限、連続

定義　距離

点 P (a, b) と点 Q (c, d) の距離を
$d(P, Q) = d((a, b), (c, d)) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$
と定義する。

1 変数の場合に数列 $\{x_n\}_n$ を考えて様に 2 変数の場合には点列 $\{P_n\}_n$ $(P_n\ (x_n, y_n))$ を考えることができる。

定義　収束

点列 $\{P_n\}_n$ がある点 A に収束する
$\Leftrightarrow d(P_n, A) \to 0\ (n \to \infty)$
で定義し $P_n \to A\ (n \to \infty)$ 等と書く。

2 変数関数、極限、連続

注意

2 変数関数 $f(x,y)$ と、点列 $\{P_n\}_n$ $(P_n\ (x_n,y_n))$ に対して $\{f(P_n)\}_n$ は各項 $f(P_n)=f(x_n,y_n)$ が実数になるため、(1 変数の) 数列となる。
このためこの数列 $\{f(P_n)\}_n$ の収束、発散は前期に行った数列の収束、発散が適用できる。

定義　関数の極限

2 変数関数 $f(x,y)$ と、ある点 $A\ (a,b)$ に対して、関数の極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ を次のように定義する。

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=C$$

$\Leftrightarrow$ $(x_n,y_n)\to(a,b)$ $(n\to\infty)$ となる全ての点列 $\{(x_n,y_n)\}_n$ に対して、$f(x_n,y_n)\to C$ $(n\to\infty)$ となること。

2 変数関数、極限、連続

2 変数関数の極限を数列の極限を通して定義したので、数列の極限で成り立つことは、2 変数関数の極限でも成り立つ。

定理 1

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l, \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = m$$ の時

(1) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \{f(x,y) \pm g(x,y)\} = l \pm m$$

(2) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \{f(x,y) \cdot g(x,y)\} = l \cdot m$$

(3) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{l}{m}$$ ただし $g(x,y) \neq 0, \quad m \neq 0$

定理 2　はさみうちの原理

$f(x,y) \leq h(x,y) \leq g(x,y)$ かつ

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = l$$ の時

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = l$$

2 変数関数、極限、連続

2 変数関数の連続性も 1 変数関数の時と同じように定義する。
このため同様に 1 変数関数の持つ性質が受け継がれる。

定義　関数の連続

2 変数関数 $f(x,y)$ と、ある点 $A\ (a,b)$ に対して、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

の時 (x,y) は点 A で連続と定義する。
2 変数関数 $f(x,y)$ が D 上全ての点で連続ならば、D 上で連続、D 上の連続関数と呼ぶ。

2変数関数、極限、連続

定理 3

(1) 2変数関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が点 (a,b) で連続の時
$f(x,y) \pm g(x,y)$, $f(x,y)g(x,y)$ も点 (a,b) で連続
$g(a,b) \neq 0$ ならば $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ も点 (a,b) で連続
(2) 2変数関数 $f(x,y)$, $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ が連続関数ならば合成関数 $f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ も連続関数。

定理 4　最大最小

有界閉集合 D 上の連続関数 $f(x,y)$ は D 上で最大、最小をとる。

2 変数関数、極限、連続

定理 5

領域 D 上の連続関数 $f(x, y)$ が D 上の 2 点 A, B で $f(A) < f(B)$ とする。
このとき $f(A) < \forall\gamma < f(B)$ に対して $f(C) = \gamma$ となる点 C が D 内にある。

2 変数関数、極限、連続

我々のよく知っている関数は連続関数ばかりである。この事実と、定理 1 定理 3 を合わせると、ほとんどの関数は連続関数になる。一方で割り算を行うときに分母 $\neq 0$ の条件が付いているために、1 変数関数の時も不連続性などが起こったが、2 変数関数も同様のことが起こる。さらに 1 変数関数の時には起こらなかったことも考えられる。

2 変数関数、極限、連続

例

次の 3 つの関数の $(x,y) \to (0,0)$ の極限 (連続性) を考える。

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

どの関数の分母も $(x,y) \to (0,0)$ で 0 になるため定理 1 または定理 3 を適用することはできない。
前 3 つの関数は分母に出てくる x, y の次数が同じなので極座標を使う。
$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \ (r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi)$
と置くと $r \to 0$ にすれば $(x,y) \to 0$ になる。このとき

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r} = r\cos\theta\sin\theta$$

と計算できるので定理 2(はさみうちの定理) を使うのに

2 変数関数、極限、連続

$-r \leq \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq r$ と取れるため

$\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \ ((x,y) \to 0)$ が分かる。

同様に計算して

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta$

となるが、これは r によらないが一方で θ を固定したまま $r \to 0$ とすると $\cos\theta$ に収束する。

これは角度 θ を決めて、原点を通る直線を考えて、その直線に沿って点列を原点 $(0,0)$ へと近づけると、角度毎に違う値 $\cos\theta$ に収束することを示している。

このため関数の極限の定義に反するので発散する (収束しない)。

2 変数関数、極限、連続

$\dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{\cos\theta}{r}$ なので $\cos\theta \neq 0$ であれば発散していることはすぐに分かる。
最後の例も同じように極座標で書いてみると

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{r^3\cos\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta} = \frac{r\cos\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$$

なので一見一つ目の例と同じように $r \to 0$ で 0 に収束しそうである。
実際に 2 番目の例で考えたように角度 θ を決めて、原点を通る直線を考えて、その直線に沿って点列を原点 $(0,0)$ へと近づけると、全ての角度で 0 に収束している。
ただし今回の場合は θ を r と連動して動かすことにより、全体としては収束しない。
直感的に $r \to 0$ にするときに $ar = \cos\theta$ となるように動かせば、$\cos\theta \to 0$ になるので $\sin^4\theta \to 1$ になっているはずで、この時

2 変数関数、極限、連続

分子 $= r\cos\theta = ar^2$， 分母 $= \cos^2\theta + r^2\sin^4\theta \cong a^2r^2 + r^2$
となるので、$\sin^4\theta \cong 1$ とした近似が大きく間違っていない限り a の値毎に違う値 $\dfrac{a}{a^2+1}$ に収束しそうである。
実際に $ar = \cos\theta$ に近い関数である放物線 $x = ay^2$ に沿って点列 $\{(ay_n^2, y_n)\}_n$ をとり $y_n \to 0$ としてみると

$$\frac{(ay_n^2)y_n^2}{(ay_n^2)^2 + y_n^4} = \frac{a}{a^2+1}$$

と a 毎に違う値になっている。(y_n に関して極限をとってもこの値に収束する。)
このため 2 番目の時と同じように発散する。

2 変数関数、極限、連続

問題

次の関数の $(x, y) \to (0, 0)$ の極限を求めよ。

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$