

基礎数理 A I 期末レポート

問1 以下の極限が存在すればその極限値を求めよ。(なければ存在しないと解答せよ.)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3} - n^2}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}, \quad (3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2},$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x - 2x^2 - \sin x}, \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{(1 + x + 2x^2) \arcsin x}, \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} \right)^{\sin x}$$

問2 以下の関数の微分を求めよ.

$$(1) \frac{1}{x \log x}, \quad (2) \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad (3) (x^2 + 1)e^{x^2}, \quad (4) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^4, \quad (5) \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right)^{\sin x}, \quad (6) 4x \arcsin x$$

問3 以下の関数の積分を求めよ. なおこの中には初等関数では書ききれないものも含まれている.(そのような問題は積分できないと書くように)

$$(1) e^{x^2}, \quad (2) e^x \sin x, \quad (3) 2x \arctan x, \quad (4) \log(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$(5) \frac{x^5 + 3x^4 + 2x + 1}{x^3 + 1}, \quad (6) \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$$

問4 以下を解答せよ

(1) $f(x) = \cos x$ の n 回導関数を求めよ.

(2) $g(x) = (1 + x^2) \cos x$ の n 回導関数を求めよ.(ヒント: ライプニッツの公式)

(3) $f(x) = \cos x$ の $x = 0$ でのテーラー展開を求めよ.

($f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書いた時の a_n を求めよ.)

(4) $g(x) = (1 + x^2) \cos x$ の $x = 0$ でのテーラー展開を求めよ.

($g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ と書いた時の b_n を求めよ.)

(5) $g(x) = (1 + x^2)f(x) = (1 + x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ と(形式的に)展開した時の係数と(4)でのテーラー展開の係数 b_n を比較し, 違いを述べよ.

問5 以下を解答せよ.

(I) 次の広義積分は収束するか? 収束すればその値を求めよ.(必要ならば α に関して場合分けをせよ.)

$$(1) \int_0^1 x^\alpha dx, \quad (2) \int_1^\infty x^\alpha dx.$$

(II) (1) 次の広義積分は収束するか? 収束すればその値を求めよ.

$$\int_e^\infty \frac{1}{x \log x} dx, \quad \int_e^\infty \frac{1}{x \log x + x \log(\log x)} dx, \quad \int_e^\infty \frac{1}{x \log x + x \log(\log x) + x} dx$$

(2) 次の極限は存在するか? 存在すればその値を求めよ.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\int_e^y \frac{1}{x \log x + x \log(\log x)} dx}{\int_e^y \frac{1}{x \log x + x \log(\log x) + x} dx}$$

問6 以下を解答せよ.

(1) 次の高階微分を求めよ。(2) との関係を考えよ)

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})$$

(2) 関数 $L_n^\alpha(x)$ を

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})$$

と定義すると $L_n^\alpha(x)$ は n 次の多項式であることを示せ。

(3) $y = L_n^\alpha(x)$ と書いたとき以下が成立することを示せ。

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$$