

基礎数理 AI 第 14 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

7 月 30 日

積分の応用

定積分が面積と対応しているのは定義から明らか。

積分の応用

極座標

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

は回転対称性がある設定でよく使われる変数変換である。

定理 13

曲線 $r = f(\theta)$, $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ と $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ で囲まれる面積は

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta$$

積分の応用

- 例 $r = a$: 半径 a の円 (扇形)

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} a^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 (\beta - \alpha)$$

特に $\alpha = 0, \beta = 2\pi$ とすれば円になり $S = \pi a^2$

- 例 $r = a\theta$: アルキメデスの螺旋

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (a\theta)^2 d\theta = \frac{1}{6} a^2 (\beta^3 - \alpha^3)$$

定義

曲線が

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

で与えられるとき曲線の長さを

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

と定義する。

命題

特に $f(t) = t$ の場合

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (g'(t))^2} dt$$

極座標で $r = f(\theta)$ の場合は

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta$$

積分の応用

○ 例 $r = a$: 半径 a の円 (扇形)

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2 + 0^2} d\theta = a(\beta - \alpha)$$

特に $\alpha = 0, \beta = 2\pi$ とすれば円になり $S = 2\pi a$

○ 例 サイクロイド

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad \text{このとき } x' = a(1 - \cos t), \quad y' = a \sin t \text{ より}$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 4a \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

特に $\alpha = 0, \beta = 2\pi$ で $l = 8a$ になる。

定義

$y = f(x)$ 上の点 $(x, f(x))$ での曲率 κ 、曲率半径 ρ を

$$\kappa = \frac{f''(x)}{\{1 + (f'(x))^2\}^{3/2}}, \quad \rho = \frac{1}{|\kappa|}$$

と定義する。

問題

アステロイド $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $(x, y \geq 0)$ はパラメータ表示

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$$

を持つ。この曲線の長さを求めよ。