基礎数理 AI 第 13 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

7 月 27 日

広義積分

ダルブーの S, s を用いて定義した定積分では、有界でない関数の積分や、積分区間が有界でない場合には対応できない。一方で、工学的な対象にはこのようなものでも意味のありそうなものはある。これらをうまくいくように定義する。

広義積分

定義　（広義積分 $f(x)$ が有界でない場合）

関数 $f(x)$ は $[a, b]$ では有界でないが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $[a, b-\varepsilon]$ (もしくは $[a+\varepsilon, b]$) では有界で

$\displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, (もしくは $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$) は可積分とする。

$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, (もしくは $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$)

が収束したとき広義積分が収束するといい $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と書く。

極限が存在しない場合広義積分が発散するという。

広義積分

定義　（広義積分積分区間が有界でない場合）

関数 $f(x)$ は $\forall M > 0$ に対して

$\displaystyle\int_a^M f(x)dx$, (もしくは $\displaystyle\int_{-M}^a f(x)dx$) は可積分とする。

$\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)dx$, (もしくは $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_M^a f(x)dx$)

が収束したとき広義積分が収束するといい

$\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx \quad$ (もしくは $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$) と書く。

極限が存在しない場合広義積分が発散するという。

広義積分

∘ 例えば $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx$ は 2 つのタイプの広義積分が 2 回づつ表れる形になるが、これらはそれぞれ切り分けて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{x} dx + \int_{-a}^{0} \frac{1}{x} dx + \int_{0}^{a} \frac{1}{x} dx + \int_{a}^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

とする。それぞれが広義積分になるが、すべてが収束すれば全体としても広義積分が収束し、1 つでも発散すれば全体として広義積分は発散する。
この例では全ての広義積分が発散している。

広義積分

∘ 広義積分において一番大事な例

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \Big[\log|x|\Big]_0^1 = \infty & \alpha = 1 \\ -\dfrac{1}{\alpha-1}\left[\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_0^1 & \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & 0 < \alpha < 1 \\ \infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \Big[\log|x|\Big]_1^\infty = \infty & \alpha = 1 \\ -\dfrac{1}{\alpha-1}\left[\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^\infty & \end{cases} = \begin{cases} \infty & 0 < \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \end{cases}$$

広義積分

○ 広義積分を置換積分することで、通常の積分になることがあるが、この場合は元の広義積分は収束している。

例として $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ は $x \to 1$ で被積分関数が発散しているので、広義積分になるが、$x = \sin t$ と変数変換すると、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

広義積分

広義積分は実際には計算不可能でも、収束、発散だけ分かるときがある。

定理 12

関数 $f(x), g(x)$ は $|f(x)| \leq g(x)$ で、広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が収束する。このとき広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も収束する。

命題

関数 $f(x), g(x)$ は $0 \leq f(x) \leq g(x)$ で、広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が発散する。このとき広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ も発散する。

広義積分

この定理 12 と命題に、広義積分において一番大事な例として挙げた $\displaystyle\int \frac{1}{x^\alpha}dx$ を組み合わせる。

例

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\alpha x}{\sqrt{x}}dx$ は $\displaystyle\left|\frac{\cos\alpha x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ であり $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ が収束したので、$\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\alpha x}{\sqrt{x}}dx$ も収束する。

広義積分

問題

広義積分 $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\,dx, \int_1^e \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\,dx$ は収束するか？
収束すればその値を求めよ。

問題

広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^4-3x^3+x^2+1}{(x-8)(x-7)(x-6)(x-5)^2(x-4)^2}\,dx$
は収束するか？（収束してもその値を求める必要はない）