

基礎数理 AI 第 12 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

7 月 20 日

三角関数・無理関数

連続関数であれば積分は定義できるが、一方でその具体形が分からないものも多い。今回扱うのは、一見具体形が分からなそうであるが、特定の変数変換を行うことで具体形が分かるものを取り扱う。

三角関数・無理関数

命題

三角関数の有理関数は $\tan \frac{x}{2} = t$ と置くことで積分可能。

まず $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ に注意する。

簡単な計算により

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dt = \left(\tan \frac{x}{2}\right)' dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} (1+t^2) dx$$

最後の式を書き換えて

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

ここで出た関係を代入することにより三角関数の有理関数は t の有理関数になり、前回の結果を適用できる。

注意

この変数変換では「必ず」計算可能になるが、もっと簡単な変数変換があることもある。

例 $\int \frac{dx}{\sin x}$

命題に従い $\tan \frac{x}{2} = t$ と変換すると

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

一方 $\cos x = u$ と置くと $-\sin x dx = du$ であり

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = - \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| \end{aligned}$$

一見違うように見えるが、実際同じ関数になる。

三角関数・無理関数

○ $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ の項がある場合これを t と変数変換すると計算可能になることがある。

$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ とおくと $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ なのでこれを x についてまとめると

$$x = \frac{-dt^n + b}{ct^n - a} \text{ であり}$$

$$dx = \frac{-dnt^{n-1}(ct^n - a) - cnt(-dt^n + b)}{(ct^n - a)^2}$$

となり有理関数に書き換えられる可能性が高い。

三角関数・無理関数

○ $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ を含む場合

$a > 0$ の場合は

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}$ とおく。これを x に関して解くと

$$x = \frac{1}{b + 2\sqrt{at}}(t^2 - c)$$

$$dx = \frac{2t(b + 2\sqrt{at}) - 2\sqrt{a}(t^2 - c)}{(b + 2\sqrt{at})^2} dt$$

なので有理関数に書き換えられる可能性が高い。

$a < 0$ の場合は $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, ($\alpha < \beta$) と2つの実数を用いて因数分解でき、さらに $\alpha < x < \beta$ でだけ考えていることに注意する。

このとき $\sqrt{\frac{x - \alpha}{\beta - x}} = t$, $\sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}} = t$ のどちらか（計算のしやす

そうな方）で変数変換すると、例えば前者の場合

$$x = \frac{\alpha + \beta t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{-2t(\alpha + \beta t^2) + \beta(1 + t^2)}{(1 + t^2)^2} dt$$

なので有理関数に書き換えられる可能性が高い。

問題

$$\int \frac{1}{1 - \sin x} dx, \quad \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$$

を計算せよ