

基礎数理 AI 第 11 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

7 月 16 日

有理関数の積分

有理数（整数の割り算で書ける数）に対応して、多項式の割り算で書ける関数を有理関数と呼ぶ。

有理関数は原理的には積分可能である。

（原理的にと書いたのは、分母の因数分解の具体形が必要であるから。）

有理関数の積分

命題 (有理関数の積分手順)

有理関数の積分は次のようなステップで行う

- (1) 割り算
- (2) 部分分数分解
- (3) 各項の積分

一般的な話に加えて、実際に $\int \frac{x^5 + 3x^4 + 2x + 3}{x^3 + 1} dx$ を例に挙げて、各ステップを見ていく。

有理関数の積分

(1) 割り算

(学年が上がるごとに使わなくなったが、整数の割り算を帯分数で書いたものに対応して)

一般には $\frac{f(x)}{g(x)}$ の $f(x)$ と $g(x)$ の最大次数を比較して、 $f(x)$ の方が次数が大きいとき、次のように書き換えられる。

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{j(x)}{g(x)}$$

ただし $h(x), j(x)$ は多項式で、 $j(x)$ の次数は $g(x)$ の次数より真に小さい

例としては

$$\frac{x^5 + 3x^4 + 2x + 3}{x^3 + 1} = x^2 + 3x + \frac{-x^2 - x + 3}{x^3 + 1}$$

有理関数の積分

(2) 部分分数分解 まず一般的に

命題

n 次の多項式は複素根を含めて n 個の根を持つ。
特に多項式の係数がすべて実数の場合複素根 α を持てば重複度を込めて $\bar{\alpha}$ も根である。

この命題から $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + |\alpha|^2$ とまとめると、この右辺の係数は実数になるので実数係数の多項式は

$$g(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_k)^{m_k} \\ (x^2 + b_1x + c_1)^{n_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{n_2} \cdots (x^2 + b_lx + c_l)^{n_l}$$

ただし $b_i^2 - 4c_i < 0$ ($1 \leq i \leq l$) と因数分解できる。

これを分母に適用する。

例では $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

有理関数の積分

命題 (部分分数分解)

多項式 $j(x), g(x)$ に対して $j(x)$ の次数は $g(x)$ より小さく

$$g(x) = (x - a_1)^{m_1} (x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_k)^{m_k} \\ (x^2 + b_1x + c_1)^{n_1} (x^2 + b_2x + c_2)^{n_2} \cdots (x^2 + b_lx + c_l)^{n_l}$$

とすると

$$\frac{j(x)}{g(x)} = \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=1}^{m_j} \frac{A_{j,i}}{(x - a_j)^i} \right\} + \sum_{j=1}^l \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} \frac{B_{j,i}x + C_{j,i}}{(x^2 + b_jx + c_j)^i} \right\}$$

と分解できる。

有理関数の積分

次の積分のステップでの計算のしやすさから、最終項を次のように変形する。

$$\frac{B_{j,i}x + C_{j,i}}{(x^2 + b_jx + c_j)^i} = \frac{B'_{j,i}(2x + b_j) + C'_{j,i}}{(x^2 + b_jx + c_j)^i}$$

$$B'_{j,i} = \frac{1}{2}B_{j,i}, \quad C'_{j,i} = C_{j,i} - B'_{j,i}b_j$$

$(2x + b_j) = (x^2 + b_jx + c_j)'$ であることに注意する。

この命題と変形を例に適用すると

$$\frac{-x^2 - x + 3}{x^3 + 1} = \frac{1}{x + 1} - \frac{2x - 2}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{x + 1} - \frac{(2x - 1) - 1}{x^2 - x + 1}$$

有理関数の積分

(3) 各項の積分

このステップの前に (1)(2) で行った計算により、被積分関数は

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=1}^{m_j} \frac{A_{j,i}}{(x - a_j)^i} \right\} + \sum_{j=1}^l \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} \frac{B'_{j,i}(2x + b_j) + C'_{j,i}}{(x^2 + b_jx + c_j)^i} \right\}$$

例では

$$\frac{x^5 + 3x^4 + 2x + 3}{x^3 + 1} = x^2 + 3x + \frac{1}{x + 1} - \frac{(2x - 1) - 1}{x^2 - x + 1}$$

となっている。

有理関数の積分

例のケースでは分解された全ての積分は可能である（知っている）
一般の場合でも、第2項までは積分は可能

第3項を見ると（係数は無視して）置換積分（必要ならば変数変換 $t = x^2 + b_j x + c_j$ ）をすることで

$$\int \frac{2x + b_j}{(x^2 + b_j x + c_j)^i} dx = \begin{cases} \log(x^2 + b_j x + c_j) & i = 1 \\ -\frac{1}{i-1} \frac{1}{(x^2 + b_j x + c_j)^{i-1}} & i \geq 2 \end{cases}$$

と計算でき、 $\int \frac{1}{(x^2 + b_j x + c_j)^i} dx$ は以下に示すように漸化式を使って原理的には計算できる。

有理関数の積分

簡単のため $I_i = \int \frac{1}{(x^2 + A)^i} dx$, ($A > 0$) に関する漸化式を導く。

$i = 1$ に対しては直接計算できて

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + A} dx = \frac{1}{\sqrt{A}} \arctan \frac{x}{\sqrt{A}}$$

$i \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} I_i &= \int \frac{1}{(x^2 + A)^i} dx = \int \frac{1}{A} \frac{(x^2 + A) - x^2}{(x^2 + A)^i} dx \\ &= \frac{1}{A} I_{i-1} - \frac{1}{2A} \int x \frac{2x}{(x^2 + A)^i} dx \end{aligned}$$

最終項に関して部分積分をすれば

$$\begin{aligned} &\int x \frac{2x}{(x^2 + A)^i} dx \\ &= -\frac{1}{i-1} x \frac{1}{(x^2 + A)^{i-1}} + \frac{1}{i-1} \int \frac{1}{(x^2 + A)^{i-1}} dx \\ &= -\frac{1}{i-1} x \frac{1}{(x^2 + A)^{i-1}} + \frac{1}{i-1} I_{i-1} \end{aligned}$$

有理関数の積分

最後に代入してまとめると

$$I_i = \frac{1}{2A(i-1)} \left\{ \frac{x}{(x^2 + A)^{i-1}} + (2i-3)I_{i-1} \right\}$$

これと $I_1 = \frac{1}{\sqrt{A}} \arctan \frac{x}{\sqrt{A}}$ より

$$I_2 = \frac{1}{2A} \left\{ \frac{x}{(x^2 + A)} + \frac{1}{\sqrt{A}} \arctan \frac{x}{\sqrt{A}} \right\}$$

$$I_3 = \frac{1}{4A} \left\{ \frac{x}{(x^2 + A)^2} + \frac{3}{2A} \left\{ \frac{x}{(x^2 + A)} + \frac{1}{\sqrt{A}} \arctan \frac{x}{\sqrt{A}} \right\} \right\}$$

と順に計算できる。

有理関数の積分

問題

$$\int \frac{x^5 - x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x - 2}{x^3 - 1} dx$$

を計算せよ