基礎数理 AI 第 9 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

7 月 9 日

積分

高校の数 3 では積分は微分の逆演算として定義した。一方でこれだとうまくいかない例があることが知られている。$(\int e^{ax^2}dx)$
安全な定義としては面積に対応する定積分を定義して、その性質から微分の逆演算として計算できるところは計算する方向にする。この部分は教科書からは外れるので注意するように。

積分

定義　（分割）

区間 $I = [a, b]$ をいくつかの小区間に分割するがその分点を
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$
とするがこれを
$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n; x_0 = a, x_n = b, x_{k-1} < x_k,\ (1 \leq k \leq n)\}$
と書き
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (第 k 区間の幅),
$|\Delta| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ (幅の最大値)
とする。

積分

定義　（ダルブーの S, s）

関数 $f(x)$ と分割 Δ に対して、ダルブーの S, s を以下のように定める

$$S(f;\Delta) = \sum_{k=1}^{n} \sup\{f(x); x_{k-1} \leq x \leq x_k\}\Delta x_k$$

$$s(f;\Delta) = \sum_{k=1}^{n} \inf\{f(x); x_{k-1} \leq x \leq x_k\}\Delta x_k$$

注意

$$S(f;\Delta) \geq s(f;\Delta)$$

積分

分割を細かくとる（間に点を加える）と S は小さくなり、s は大きくなる。
分割を細かくとることと、$\inf_{\Delta} S(f;\Delta), \quad \sup_{\Delta} s(f;\Delta)$ が対応して

$$S(f) = \inf_{\Delta} S(f;\Delta), \quad s(f) = \sup_{\Delta} s(f;\Delta)$$

と定義すると少なくとも $S(f) \geq s(f)$ は分かり、$S(f) = s(f)$ ならば面積に対応して定積分と思える。

定義　（定積分）

$S(f) = s(f)$ の時、関数 $f(x)$ は区間 $I = [a,b]$ で積分可能で $S(f)$ を定積分と呼び、以下のように書く。

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_I f(x)dx, \quad \int_{[a,b]} f(x)dx$$

積分

この定積分の定義だと、その値は分からなくても、積分可能になる十分条件は良く知られている。

命題

区間 $I = [a, b]$ 上の単調関数は積分可能である

定理 6

区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数は積分可能である

注意

区間 $I = (a, b)$ 上の連続関数は積分可能とは限らない

積分

命題

区間 $I = [a, b]$ 上で有限個の点を除いて連続な関数は積分可能である

○ 積分不可能な関数の例

区間 $I = [0, 1]$ 上で

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

は積分不可能であるが、一方で

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ が無理数} \\ \frac{1}{p} & x = \frac{q}{p} \quad \text{（既約分数）} \end{cases}$$

は積分可能で $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = 0$ になる。

積分

◦ 実際に簡単な関数で計算してみる。

区間 $I = [0, 1]$ 上で $f(x) = x$ として、

特別な分割として $\Delta_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ をとれば

$$S(f; \Delta_n) = \sum_{k=1}^{n} \sup\{f(x); \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}\}\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

同様に

$$s(f; \Delta_n) = \frac{n-1}{2n}$$

$S(f; \Delta_n)$ は n に関して単調減少で

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} S(f; \Delta_n) \geq \inf_{\Delta} S(f; \Delta_n) = S(f)$$

同様に $s(f; \Delta_n)$ は単調増大で

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} s(f; \Delta_n) \leq \sup_{\Delta} s(f; \Delta_n) = s(f)$$

積分

これより $S(f) = s(f) = \dfrac{1}{2}$ が分かり、

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

であることが分かる。

積分

この定義による利点

かなり多くの関数が積分可能になる。
（例えば連続関数）

この定義による欠点

実際問題として計算不可能。
(被積分関数が x, x^2 程度なら和の公式を覚えているかもしれないが x^{10} にもなれば知らない。)

◦ 次回この定積分の性質を調べることで、この欠点を解消する。
正確に言えば定積分の性質を調べることで、高校の数 3 のときのような計算（微分の逆演算）をすればこの定義と、同じ値になることが分かる。

積分

問題

大学入試の知識で以下の不定積分を求めよ。なお教科書 p.64 の結果は既知としてよく、中には積分できないものも含まれているので注意するように。

(1)x^α,　(2)$e^{\alpha x}$,　(3)$e^{\alpha x^2}$,　(4)$\log x$,　(5)$\log_\alpha x$,

(6)$\sin x$,　(7)$\cos x$,　(8)$\tan x$,　(9)$\dfrac{1}{x^2+a^2}$,　(10)$\dfrac{1}{x^2-a^2}$,

(11)$\dfrac{1}{\cos^2 x}$,　(12)$\arcsin x$,　(13)$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$,　(14)$\dfrac{1}{e^x+1}$