基礎数理 AI 第 8 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

7 月 6 日

微分の応用と凸関数

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ の求め方の一つ

定理 18,19　（ロピタルの定理）

$f(a)=g(a)=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

同様に

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

○ 例

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

（実際は話が逆転していることに注意）

$$\lim_{x\to +0}x\log x=\lim_{x\to +0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

必要ならば何回か適用する。

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

微分の応用と凸関数

定義　（凸関数）

$f(x)$ が下に凸

$\Leftrightarrow$

$$a < b < c \Rightarrow f(b) \leq \frac{c-b}{c-a} f(a) + \frac{b-a}{c-a} f(c)$$

命題　（凸不等式）

$f(x)$ が下に凸

$$\forall n \geq 2,\ \forall \{x_i\}_{i=1}^{n},\ \forall \{\alpha_i\}_{i=1}^{n},\ \alpha_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

微分の応用と凸関数

◦ この凸不等式の応用として相加相乗平均の不等式を導く

$f(x) = -\log x$ とすると $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$ なので $f(x)$ は下に凸

$\alpha_i = \frac{1}{n}$ $(1 \leq \forall i \leq n)$ とすると命題の仮定に適応するので、

$(f(x) = -\log x$ の条件として$)$ $x_i > 0$ として

$f(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ になるが $\log x$ の性質から

左辺 $= -\log(\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i)$

右辺 $= -\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log x_i = -\log(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= -\frac{1}{n} \log \sqrt[n]{x_1, x_2, \cdots, x_n}$$

これより相加相乗平均の不等式 $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{x_1, x_2, \cdots, x_n}$ □

微分の応用と凸関数

問題

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)}{\cos x - (1 - \frac{1}{2}x^2)}$$

を計算せよ

問題

$\{x_k\}_{k=1}^{n}$ $x_k > 0$ $(\forall 1 \leq k \leq n)$ とする。$\alpha \geq 2$ として

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha}}{\displaystyle(\sum_{k=1}^{n} x_k)^{\alpha}} \geq n^{1-\alpha}$$

を示せ