基礎数理 AI 第 1 回目

永幡幸生
新潟大学工学部

6 月 11 日

はじめに

授業に関して

毎回、資料をホームページ上
http://www.eng.niigata-u.ac.jp/~nagahata/lecture/2021/lecture-2021-a1.html
に挙げていきます。
教科書
微分積分概論　越昭三監修　高橋泰嗣・加藤幹夫　共著　サイエンス社
ISBN 978-4-7819-1329-2
をよく読みながら、資料を読んで、「問題」に解答してください。
また同時に該当する時間（火金 1 限）には zoom による授業を行います。
zoom の案内なども含めて、学務情報システムの「連絡通知」を通して行いますので、他の授業も込めて、よく確認するようにしてください。

はじめに

成績に関して

可能であれば、試験を行いその結果を基に成績を付ける予定でしたが、コロナの関係で、試験を行うことはほぼ不可能です。
シラバスにあるようにレポートで成績を付けます。
このレポートは 2 種類あります。
まず、最終回までに「期末レポート」を出題します。
これに加えて毎回、資料にある「問題」をレポートとして提出してください。
「期末レポート」の締め切りは出題日にお知らせします。
毎回のレポートの締め切りは基本的に授業の 1 週間後までとします。
なお病気などの特別な事情で締め切りに間に合わない場合は、メールで問い合わせをしてください。事情に応じて締め切り日等を変更します。

はじめに

レポートに関して

レポートは学務情報システムを使って提出してください。
レポートには数式などが入ることが多くなります。こちらとして想定している提出方法は次の 2 通りです。
(1) 手書きでレポートを作成して、スキャンもしくは写真を撮って提出する。基本的に pdf ファイルで提出してください。
(2) tex などのワープロソフトでレポートを作成、提出する。
この場合は必ず pdf ファイルに変換してから送ってください。
手書きで写真の場合、作った本人は認識できても、こちらからは認識できない可能性もあります。そのため、手書きのレポートは捨てずに取っておいてください。必要であれば、それらを最後にまとめて郵送してもらうことも検討します。

はじめに

レポートに関して

∘ どの回のレポートかを表現するのには、回数、授業日、締め切り日などいくつかありますが、皆さんがバラバラに使うとこちらが混乱しますので、基本的にスライドの 1 枚目（各ページの右下にも同じ数が出ます）に書いてある第 n 回目を使用してください。
∘ 昨年度の結果を結果を見ると、手書きで書いたレポートをスキャンして送ってくれるのが一番見やすいです。
特に（プリンターの複合機なども含めて）スキャナーがある場合は、それを使うのが一番見やすいです。
∘ ワープロなどは慣れていないと数式を書くのは大変です。読みやすいと思ってワープロを使ったつもりが逆に読みづらいものになっていることが多くあります。
∘ 各プログラムで、pdf に変換する方法などが送られていますが、その方法を使っても その他の方法を使っても構いません。
最悪の場合、画像ファイルのまま送ってくれても構いません。

はじめに

その他

授業中 (zoom 中) に通信状況が悪くなって、よく聞こえなくなり、分からなくなることもあるかもしれません。基本的には、教科書と、資料をよく読めば分かるように準備していますが、それでも分からない場合は、

nagahata@eng.niigata-u.ac.jp

宛に、質問を送ってください。

質問は、メールの本文に書けるならばそれで構いませんが、数式が必要であれば、レポートと同様にワープロソフトや、写真などをうまく使ってください。

こちらの操作ミスを避けるため、質問でファイルを送る場合は必ず添付ファイルにしてください。(外部のクラウドサービス等を使わないでください。)

どこが分からないかをよく考えて、送ってくれないと、こちらとしては回答できないこともあります。

極限

○ 実数

自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

整数全体の集合 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

有理数全体の集合 $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

このくらいまでは自然に分かる。

一方でこれで全部かと聞かれると

例えば $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ であることが分かり、これらを含む取り扱いやすい集合を定義し、これを実数 $\mathbb{R}$ としたい。

極限

定義

集合 S が上に（下に）有界
$\Leftrightarrow \exists M$ s.t. $\forall x \in S$, $x \leq M$ $(x \geq M)$.
さらにこの M を S の上界（下界）と呼ぶ。

注意

論理記号の入ったものは、基本的には英語で書かれた文章の決まった部分を記号に置き換えたものと思う。
$\exists M$ s.t. $\forall x \in S$, $x \leq M$. は
There exists M such that for all x in S, x is less than or equal to M. に対応。

注意

上界は一つとは限らない。1 が S の上界ならばそれより大きい数例えば $2, 3$, 等も S の上界。

極限

定義

S の上限（下限）
$\Leftrightarrow$ S の上界のうち最小のもの（但し存在すれば）
さらにこれを $\sup S$ と書く。
(S の下界のうち最大のもの（但し存在すれば）
さらにこれを $\inf S$ と書く。)

注意

$\sup S$ $(\inf S)$ の直感的な意味。
$S = (0, 1) = \{x; 0 < x < 1\}$ とすると $\max S$ は存在しない。
$(\min S$ も存在しない)
一方で 1 を $\max S$ "もどき" (0 を $\min S$ "もどき") として使いたい。
これを $\sup S$ $(\inf S)$ としたと思ってよい。

極限

定義　実数の連続性

上に有界な集合には上限が存在する。

命題　アルキメデスの原理

自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は上に有界でない。

命題　有理数の稠密性 (ちゅうみつせい、ちょうみつせい)

任意の異なる 2 数の間には有理数が存在する。

極限

∘ 数列

$\{a_1, a_2, \ldots\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n\geq 1}$,
と書かれたり、さらに省略して $\{a_n\}$ 等と書かれるが全て同じものを指す。

∘ 数列の極限

数列の極限、もしくは数列が収束するということは直感的には分かるが、よく考えようとすると意味不明になることが多い。
例えば $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ が 0 へ収束することは高校で習っただけでなく、直感的にも「n を大きくすると 0 になる。」と思える。一方でどんなに n を大きくしても $1/n$ は正の数であり 0 ではない。
直感的に問題のないことだけを扱っている場合にはこの程度の考え方でよいが、込み入った状況ではその直感を信じてよいのかも分からない。
次の定義 (ε-δ 論法、もしくは ε-n 論法) がそれに対する一つの答えである。

極限

定義　数列の収束

$\{a_n\}$ が α に収束する
$\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$
$\Leftrightarrow a_n \to \alpha \ (n \to \infty)$
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists N \text{ s.t. } \forall n \geq N, \ |a_n - \alpha| \leq \varepsilon.$

注意

定義のうち上 3 個は、言葉や記号の定義である。
実質的な定義である一番下は直感的には
ε を誤差として、回数 n を増やせば誤差がなくなり、収束すると言っている。
先に誤差 ε を決めれば、少なくとも N 回目以降は必ずその誤差の範囲以内に収まってくれると言っている。
当然誤差 ε を小さくすれば回数 N は大きくなっているはずである。

極限

注意

$\forall\varepsilon\ \exists N$ などを入れ替えてしまうと、（基本的には英語の文章なので）意味が変わってしまう。日本語でもそれは同じで、例えばじゃんけんで
「（相手が出す）全ての手に対してある手があって勝てるか？」と
「ある手があって（相手が出す）全ての手に対して勝てるか？」
では意味が違う
（どちらの文も少しいいかえて、時間経過を加えて
「（相手が出した）全ての手に対してある手を出せば勝てるか？」
「ある手を出せば（相手が出す）全ての手に勝てるか？」
とすると違いが明確になる。)

極限

定義　数列の発散

$\{a_n\}$ が発散する
$\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ が収束しない

注意

日本語（日常用語）としての発散は、「外部へ散らばり出ること」で、1 次元的な状況では（絶対値が）大きくなることを想像させるが、数学用語としての発散は上の定義の通りで、例えば（三角関数のように）振動していても、収束しないので「発散する」を用いる。

定義　数列の発散

$\{a_n\}$ が発散するときに、特にいくらでも大きくなる時
$\{a_n\}$ は ∞ に発散するといい
$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, もしくは $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ と書く。

極限

命題

極限値は存在すればただ一つ。
すなわち $a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ かつ $a_n \to \beta$ $(n \to \infty)$ であれば
$\alpha = \beta$

極限

定理 1　基本性質

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする。

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

(4) $a_n \leq b_n \Rightarrow \alpha \leq \beta$

定理 2　はさみうちの定理

$a_n \leq c_n \leq b_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

極限

問題

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ を認める。定理 1、定理 2 を使って次の数列は収束するか？収束すればその極限値を求めよ。

$$\left\{\frac{n+2}{n^2+n+1}\right\}$$

$$\left\{\frac{n^2+2}{n^2+n+1}\right\}$$

$$\left\{\frac{n^3+2}{n^2+n+1}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}\right\}$$

$$\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$$